4.21 Majorantenkrit.: Sei (a_k) Folge in $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, (c_k) eine reelle Folge mit konvergenter Reihe $\sum c_k$ und

$$\left.\begin{matrix}\|a_k\|\\ |a_k|\end{matrix}\right\} \le c_k \text{ für } k \ge K_0$$

Dann ist $\sum a_k$ absolut konvergent.

Beweis: Für $m > n \ge K_0$ gilt

$$\sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \le \underbrace{\sum_{k=n+1}^{m} c_k < \varepsilon \text{ für } m>n>N_\varepsilon}_{\text{Cauchy-Krit. für } \sum c_k}$$

$\overset{\text{Cauchy-}}{\underset{\text{Krit}}{\Longrightarrow}}$ $\sum \|a_k\|$ konv.

$\overset{\text{Def. absol.}}{\underset{\text{Konv.}}{\Longrightarrow}}$ $\sum a_k$ absolut konv. □

Die Reihe $\sum c_k$ heißt Majorante für $\sum a_k$.

4.22 Minorantenkrit.: $(a_k), (c_k)$ reelle Folgen mit $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \infty$ und

$$a_k \ge c_k \text{ für } k \ge K_0.$$

Dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$.

4.23 Beispiele: 1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+3^k}$ ist konvergent nach Majo-Kriterium:

$$\frac{1}{k+3^k} \le \frac{1}{3^k} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k \overset{\text{geometr.}}{\underset{\text{Reihe}}{=}} \frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{k+3^k} \le \frac{1}{k} \text{ für } k \ge 1, \text{ aber } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \right)$$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}}$ ist divergent nach Minorantenkrit:

$$k^{2/3} \le k \Rightarrow \frac{1}{k^{2/3}} \ge \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$$

3) $\sum \frac{1}{k^2}$ ist konvergent nach Majo-Krit:

$$\frac{1}{k^2} \le \frac{1}{k(k-1)} \text{ für } k \ge 2 = K_0$$

$$\sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{1}{k(k-1)}}_{=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}} = \underbrace{\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \dots}_{\text{Teleskopsumme}}$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1$$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$ ist konv. nach Majo-Krit:

$$2^n = \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\right)^n = (1 + \underbrace{\sqrt{2}-1}_{=x>0})^n \cdot (1 + \underbrace{\sqrt{2}-1}_{>0})^n$$

Bernoullie-Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$

$$\geq \left(\cancel{1}+n(\sqrt{2}-1)\right)\left(\cancel{1}+n(\sqrt{2}-1)\right)$$

weglassen

$$\geq n^2(\sqrt{2}-1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{n^2}{4^n} = \frac{n^2}{2^n \cdot 2^n} \leq \frac{\cancel{n^2}\ 1}{2^n \cdot \cancel{n^2}(\sqrt{2}-1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)2^n} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ ist konv.}$$

(geometr. Reihe mit $q = \frac{1}{2}$, also $|q| < 1$)

4.24 Wurzelkriterium: Sei (a_k) Folge.

1) Falls es ein $q \in [0,1[$ gibt, so dass

$$\sqrt[k]{\|a_k\|} \leq q \quad \text{für } k \geq K_0$$

dann ist $\sum a_k$ absolut konvergent.

Falls $\sqrt[k]{\|a_k\|} \geq 1$ für $k \geq K_0$ folgt Divergenz für $\sum a_k$.

2) Falls $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|a_k\|}$ existiert, setze

$$q := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|a_k\|}$$

Dann

$q < 1 \Rightarrow \sum a_k$ konv. absolut

$q > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergiert

$q = 1 \Rightarrow$ Keine Aussage über Konvergenz von $\sum a_k$ mit Wurzelkrit. möglich

Beweis: 1) $\sqrt[k]{\|a_k\|} \le q$ für $k \ge K_0$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \|a_k\| \le q^k \text{ für } k \ge K_0 \\ &|q|<1 \Rightarrow \sum q^k \text{ ist konv.} \end{aligned}\right\} \xRightarrow{\text{Majo-Krit}} \sum a_k \text{ konv. absolut}$$

Falls $\sqrt[k]{\|a_k\|} \ge 1$ für $k \ge K_0$

$\Rightarrow \|a_k\| \ge 1^k = 1$ " "

$\Rightarrow \neg(a_k \to 0)$

$\xRightarrow{\text{Nullfolge-Krit.}} \sum a_k$ divergiert. $\square$

4.25 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(2+\frac{1}{k})^k}$ ist konvergent

nach Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{\frac{k^2}{(2+\frac{1}{k})^k}} = \frac{(k^2)^{1/k}}{\left((2+\frac{1}{k})^k\right)^{1/k}} = \frac{(k^{1/k})^2}{2+\frac{1}{k}} \longrightarrow \frac{1^2}{2} =: q$$

$q = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ absolute Konvergenz $\sum a_k$

4.26 Satz: $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$

Beweis im Skript.

4.27 Quotientenkriterium: (a_n) Folge in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ für $n \geq k_0$.

1) Falls es ein $q \in [0,1[$ gibt, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q \quad \text{für } n \ge k_0$$

dann ist $\sum a_n$ absolut konv.

Falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge 1$ für $n \ge k_0$, dann ist $\sum a_n$ divergent.

2) Falls $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n \ge k_0}$ konv., setze

$$q := \lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Dann:
- $q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ absolut konv.
- $q > 1 \Rightarrow \sum a_n$ ist div.
- $q = 1 \Rightarrow$ Keine Aussage mit Quotientenkrit. möglich.

Zum Beweis von 1): Sei $n = k_0 + m$

$$\left|\frac{a_n}{a_{k_0}}\right| = \left| \underbrace{\frac{a_{\overbrace{k_0+m}^{=n}}}{a_{k_0+m-1}}}_{|\,|\le q} \cdot \underbrace{\frac{a_{k_0+m-1}}{a_{k_0+m-2}}}_{|\,|\le q} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}}}_{|\,|\le q} \right| \le q^m$$

$$\Rightarrow |a_{\underbrace{k_0+m}_{n}}| \le |a_{k_0}| \cdot q^m = \underbrace{\frac{|a_{k_0}|}{q^{k_0}}}_{\text{konst.}} q^{\overbrace{k_0+m}^{n}}$$

4.28 Beispiele:

1) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$ ist absolut konv., falls $|z|<1$, $z\in\mathbb{C}$ und divergent, falls $|z|\geq 1$.

Für $z\neq 0$

Quotientenkrit.: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)^2 z^{k+1}}{k^2 z^k}\right|$

$$= \frac{(k+1)^2}{k^2}\cdot|z| = \Big(\underbrace{\frac{k+1}{k}}_{\to 1}\Big)^2 |z| \longrightarrow |z| =: q$$

$\Rightarrow \sum a_k$ ist absolut konv. für $|z|<1$

divergent für $|z|>1$

Für $|z|=1$: $|a_k| = |k^2 z^k| = k^2 |z|^k = k^2 \to +\infty$

$\Rightarrow \neg(a_k \to 0) \underset{\text{Krit}}{\overset{\text{Nullfolge-}}{\Rightarrow}} \sum k^2 z^k$ ist div.

Wurzelkriterium:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{|k^2 z^k|} = \sqrt[k]{k^2\cdot|z|^k}$$

$$= k^{2/k}\cdot|z|^1 = \big(\underbrace{k^{1/k}}_{\to 1}\big)^2 |z| \to |z| =: q$$

$\Rightarrow$ Die selbe Aussage wie mit Quotientenkrit.

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konv. absolut für alle $z\in\mathbb{C}$.

Quotientenkrit. (für $z\neq 0$): $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{z^k}{k!}}\right| =$

$$= \left|\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{z^k}\right| = \left|\frac{z\cdot \cancel{k!}}{(k+1)\cdot\cancel{k!}}\right| = \frac{|z|}{k+1} \longrightarrow 0 =: q$$

$q=0 \Rightarrow \sum a_k$ ist absolut konv.

3) Im Fall $q=1$ kann alles passieren

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent, und

$$\sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k^{1/k}} \to 1 =: q$$

$$\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} \to 1 =: q$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist konv. und

$$\sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{(k^{1/k})^2} \to 1 =: q$$

$$\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1 =: q$$

4) Siehe Skript: Das Wurzelkrit. ist stärker als das Quotientenkrit.

$$q_{\text{Quotientenkrit.}} < 1 \Rightarrow q_{\text{Wurzelkrit.}} < 1$$

aber $q_{\text{Quotientenkrit.}} \geq 1$ und $q_{\text{Wurzelkrit.}} < 1$ möglich.

<u>4.29 Produkt von Reihen:</u> $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

Beim Ausmultiplizieren der linken Seite kommen alle Produkte $a_k \cdot b_\ell$ vor. Cauchy sortiert:

0) $a_0b_0 \quad a_0b_1 \quad a_0b_2 \quad a_0b_3 \quad a_0b_4 \ \dots$

1) $a_1b_0 \quad a_1b_1 \quad a_1b_2 \quad a_1b_3 \quad a_1b_4 \ \dots$

2) $a_2b_0 \quad a_2b_1 \quad a_2b_2 \quad a_2b_3 \ \dots$

3) $a_3b_0 \quad a_3b_1 \quad a_3b_2 \ \dots$

$a_4b_0 \quad a_4b_1 \ \dots$

$$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = \sum_{k=0}^{2} a_k b_{2-k}$$

$$c_n := a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Sind $\sum a_k$, $\sum b_k$ absolut konv. Reihen und $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konv., und für die Grenzwerte gilt $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

Achtung: Falls $\sum a_n$ oder $\sum b_n$ nur bedingt konv., kann $\sum c_n$ sogar divergieren.

4.30 Beispiel: Für $|q|<1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ absolut konv.

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-q)^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{q^k \cdot q^{n-k}}_{=q^n} = (n+1)q^n$