4.5 Potenzreihen

4.31 Def: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und (a_k) eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

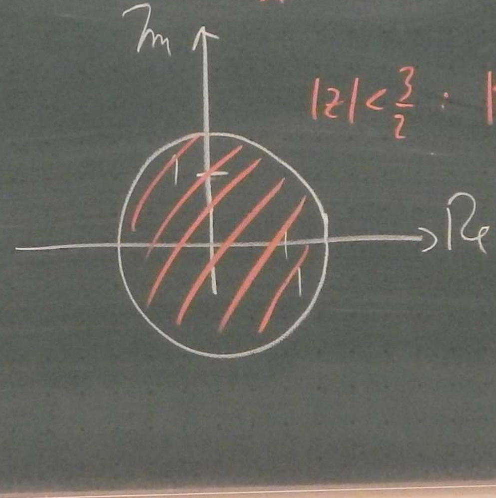
Potenzreihe um z_0 mit den Koeffizienten a_k. Falls $z, z_0, a_k \in \mathbb{R}$, heißt die Potenzreihe reell. Für Potenzreihen wird $0^0 := 1$ definiert

4.32 Beisp:

$$\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{2z}{3}}_{=q}} =$$

$$\underset{\text{Reihe}}{\overset{\text{geomtr.}}{=}} \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^k \quad \text{für } \left|\frac{2z}{3}\right| < 1$$

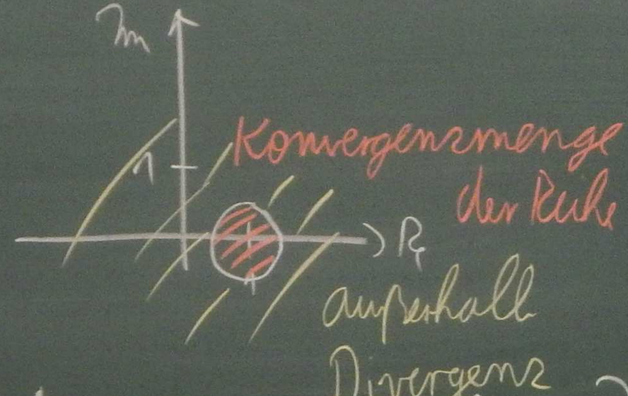
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{2^k}{3^{k+1}}}_{=a_k} (z - \underbrace{0}_{z_0})^k \quad \text{für } |z| < \frac{3}{2}$$



$|z| < \frac{3}{2}$: Konvergenzmenge der Reihe

Oder: $\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{1-\underbrace{(2z-2)}_{=q}} = \sum_{k=0}^{\infty} (2z-2)^k$ für $|2z-2|<1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{2^k}_{a_k}(z-\underbrace{1}_{=z_0})^k \quad \text{für } |z-\underbrace{1}_{z_0}|<\frac{1}{2}$$



4.33 Satz: Sei $\sum a_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe.

1) Es gibt eine eindeutig bestimmte "Zahl" $R\in[0,\infty]$, so dass gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent für } |z-z_0|<R \\ \text{divergent für } |z-z_0|>R \end{cases}$$

Für $|z-z_0|=R$ kann die Reihe konv. oder div. sein. R heißt <u>Konvergenzradius</u> der Potenzreihe.

2) Falls $r:=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ oder $r:=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$ existiert (falls beide exist., sind sie gleich) oder $r=\infty$ gilt, so folgt $R=\frac{1}{r}$, d.h.

$$R=\begin{cases} \frac{1}{r} & \text{falls } 0<r<\infty \\ \infty & \text{falls } r=0 \\ 0 & \text{falls } R=\infty \end{cases}$$

Im Allgemeinen: $r = \limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ (Limes superior = größte Zahl, die als Grenzwert einer Teilfolge erreicht werden kann), R wie oben.

Zum Beweis von 2): Wende Wurzelkrit. auf die Potenzreihe an:

$$\sqrt[k]{|a_k(z-z_0)^k|} = \sqrt[k]{|a_k|}\cdot|z-z_0|$$

$$\to r\cdot|z-z_0| \begin{cases} <1 \Rightarrow \text{absolute Konv.}\\ >1 \Rightarrow \text{Divergenz}\end{cases}$$

$\Rightarrow$ absolute Konv. für $|z-z_0| < \frac{1}{r} =: R$.

4.34 Beispiele: 1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$: $a_k = \frac{1}{k!}$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

$\Rightarrow r = 0, \quad R = \infty$

$\Rightarrow$ Die Potenzreihe konv. absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$.

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 z^k$: $a_k = k^2$, $\sqrt[k]{k^2} = \left(\sqrt[k]{k}\right)^2 \to 1$

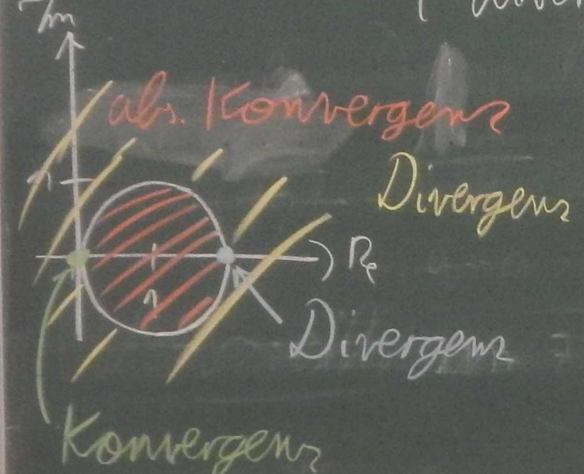
$\Rightarrow R = \frac{1}{1}$, d.h. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2 z^k$ ist $\begin{cases} \text{absolut konv. für } |z|<1 \\ \text{divergent für } |z|>1 \end{cases}$

$|z| = 1$: $|k^2 z^k| = k^2 |z|^k = k^2 \not\to 0$

Nullfolgekrit. $\Rightarrow$ Reihe ist divergent für $|z| = 1$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{k}$ $\quad a_k = \frac{1}{k}$, $\sqrt[k]{\frac{1}{k}} \to 1 \Rightarrow R = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow$ Reihe ist $\begin{cases} \text{absolut konv. für } |z-1|<1 \\ \text{divergent} \quad \text{"} \quad |z-1|>1 \end{cases}$



$z=2$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ div. (harmonische R.)

$z=0$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konv. nach Leibniz-Krit.

4) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 3^k & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \longrightarrow 1 \\ 3 \longrightarrow 3 \end{cases}$

$\Rightarrow r = 3$, $R = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{absolute Konv. für } |z| < \frac{1}{3} \\ \text{Divergenz für } |z| > \frac{1}{3} \end{cases}$

4.35 Identitätssatz: Seien

$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$ Das selbe z_0

Potenzreihen mit jeweils positivem R. Existiert eine Folge (z_k) mit $z_k \to z_0$ und $f(z_k) = g(z_k)$ für $k \in \mathbb{N}$, dann folgt $a_k = b_k$, also auch $f = g$. Insbesondere ist jede Fkt. auf höchstens eine Weise als Potenzreihe um z_0 darstellbar.

siehe 4.32:

$$\frac{1}{3-2z} = \underbrace{\sum \frac{2^k}{3^{k+1}}(z-0)^k}_{f(z)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} 2^k (z-1)^k}_{g(z)}$$

$z_0=0$ $\qquad$ $z_0=1$

4.36 Multiplikation: Seien

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \quad \text{für } |z-z_0|<R_1,\ R_1>0$$

das selbe z_0

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k \quad \text{für } |z-z_0|<R_2,\ R_2>0$$

Für $|z-z_0|<R := \min\{R_1,R_2\}$ konvergieren beide Reihen absolut

Cauchy-Produkt $\Rightarrow f(z)\,g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k\, b_{n-k}(z-z_0)^{n-k}$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(z-z_0)^n$$

für $|z-z_0|<R$

(Potenzreihe um z_0) $\cdot$ (Potenzreihe um z_0) = Potenzreihe um z_0.

4.6 Spezielle Funktionen

4.37 Def: $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für $z \in \mathbb{C}$

$\ln(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}(z-1)^{k+1}$ für $z\in\mathbb{C}$ mit $|z|<1$ $(R=1)$

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

$$(R = \infty)$$

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}$$

4.38 Eigenschaften: 1) $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, denn:

$$\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z^k}{k!}}_{a_k}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{w^k}{k!}}_{b_k}\Big) \overset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overset{!}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!}$$

mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{z^k}{k!}}_{a_k} \underbrace{\frac{w^{n-k}}{(n-k)!}}_{b_{n-k}} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{=\binom{n}{k}} z^k w^{n-k}$

$$\overset{\text{Binom. Satz 1.34}}{=} \frac{1}{n!}(z+w)^n \Longleftarrow\!\!= \Rightarrow$$

Weiter gelten

$$e^0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!} = e$$

$$\left.\begin{aligned} e^{1/2} \cdot e^{1/2} &\overset{\text{vorher}}{=} e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = e^1 = e \\ e^{1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(\frac{1}{2})^k}{k!}}_{>0} > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow e^{1/2} = \sqrt{e}$$

Mit Induktion: e^q = q-te Potenz von e für $q \in \mathbb{Q}$.

2) Später: Die reelle Exponentialfunktion

$e^{(\cdot)}: \mathbb{R} \to]0,\infty[: x \mapsto e^x$ ist bijektiv

Die Umkehrabb. stimmt für $|x-1| < 1$ mit der oben def. ln-Fkt überein, d.h.

$$\ln(e^x) = x = e^{\ln x}$$

3) $\sin(-z) = -\sin(z)$, $\cos(-z) = \cos(z)$

4) $\cos(z) + i\sin(z) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^k}\, i^{2k}}{(2k)!} z^{2k} + \cancel{i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cancel{(-1)^k}\, i^{2k+1}}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l!} z^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iz)^l}{l!} = e^{iz}$$

$$\Rightarrow e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

$$\Rightarrow e^{iz} + e^{-iz} = \cos z + i\sin z + \underbrace{\cos(-z)}_{=\cos(z)} + i\underbrace{\sin(-z)}_{=-\sin(z)}$$

$$= 2\cos(z)$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i\sin(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) \\ \sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) \end{cases}$$

Formel von Moivre:

$$\Big(\underbrace{\cos(z) + i\sin(z)}_{=(e^{iz})^n = e^{inz}}\Big)^n = \cos(nz) + i\sin(nz)$$