5) $\sin^2(z) + \cos^2(z) =$

$$\overset{4)}{=} -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2iz}} - 2\underbrace{e^{iz}e^{-iz}}_{=e^0=1} + \cancel{e^{-2iz}}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2iz}} + 2\underbrace{e^{iz}e^{-iz}}_{=1} + \cancel{e^{-2iz}}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{4}\right)(-2) + \frac{1}{4}\cdot 2 = 1$$

Achtung $\sin(it) = \frac{1}{2i}\left(e^{i^2 t} - e^{-i^2 t}\right)$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-t} - e^{t}\right)$$

$\Rightarrow 2i\sin(it) \longrightarrow -\infty$ für $t \to \infty$

insbesondere ist der komplexe Sinus nicht beschränkt

6) Additionstheoreme:

$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$$

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

z.B. $\sin(z)\cos(w) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)$

7) Später: Für $x \in \mathbb{R}$ stimmen $\sin(x)$, $\cos(x)$ mit der reellen aus der Schule bekannten Sinus- bzw. Cosinusfunktion überein. Es folgen:

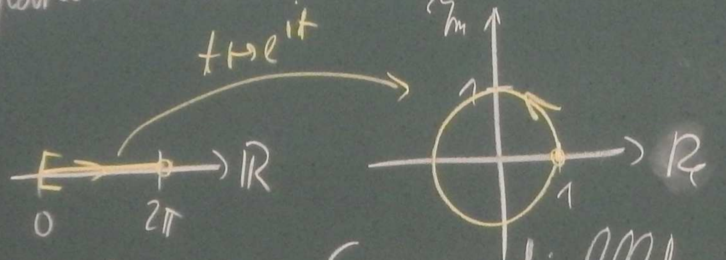
a) $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + i1 = i$

$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$

$e^{i\frac{3\pi}{2}} = \dots = -i$

$e^{i2\pi} = \dots = 1$

Die Abbildung $t \mapsto e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$ parametrisiert den Einheitskreis



e) Die komplexe Exponentialfkt. ist $2\pi i$-periodisch: $e^{z+2\pi i} = e^{z}e^{2\pi i} = e^{z}$

c) Die komplexe Sinus- bzw. Cosinusfunktion ist 2π-periodisch:

$$\cos(z+2\pi) \overset{\text{Add.}}{\underset{\text{theorem}}{=}} \cos(z)\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} - \sin(z)\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}$$

$$= \cos(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

4.39 Def: Sei $V = M_{n,n}$ der vollständige Vektorraum der $n\times n$-Matrizen mit

$$\|A\| = \|(a_{ij})\| := n \cdot \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|$$

Dann:

$$\|A\cdot B\| = \|(a_{ij})(b_{ij})\| = \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\Big)_{i,k}\Big\|$$

$$\leq n \cdot \max_{1 \leq i,k \leq n} \Big| \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|a_{ij}\, b_{jk}|}_{\substack{\leq \max|a_{ij}| \cdot \max|b_{ij}| \\ = \frac{1}{n}\|A\| \cdot \frac{1}{n}\|B\|}} \Big|$$

$$\leq n \cdot \max_{i,k} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n^2}\|A\| \cdot \|B\|}_{= n \cdot \frac{1}{n^2}\|A\| \cdot \|B\|}$$

$$= \|A\| \cdot \|B\|$$

$$\Rightarrow \|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Definiere $e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

$$\sin(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}$$

$$\cos(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$$

für $A \in M_{n,n}$, wobei $A^0 := E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Wegen $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \frac{1}{k!}\|A^k\| \leq \frac{1}{k!}\|A\|^k$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\|A\|^k}_{=z^k} = e^{\overset{\|A\|}{z}} \text{ ist konv.}$$

Majo-Krit $\Rightarrow$ $\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \text{ konvergiert} \\ \|e^A\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq e^{\|A\|} \end{cases}$

4.40 Eigenschaften: 1) $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$

insbes. $e^{-A} = (e^A)^{-1}$ inverse Matrix, denn

$$e^A \cdot e^{-A} = e^{A+(-A)} = e^0 = E_n$$

2) $\sin(-A) = -\sin(A)$, $\cos(-A) = \cos(A)$

4.41 Beisp: $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \mu^k \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \frac{\lambda^k}{k!} & 0 \\ 0 & \frac{\mu^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu^k}{k!} \end{pmatrix} \xrightarrow[n \to \infty \text{ bezgl. } \|\ \|]{} \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$$

4.42 Geometrische Reihe: Für $A \in M_{n,n}$ mit $\|A\| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (E_n - A)^{-1}.$$

Konvergenz aus $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k$ konv. mit Majo-Krit. und

$\begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 \\ 0 & e^{\mu} \end{pmatrix}$

gl. II II.

$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$

Für

lt

konv. mit

$$(E_n - A)\cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = E_n \cdot \sum - A \cdot \sum$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1}$$

$$= A^0 + \underbrace{\cancel{\sum_{k=1}^{\infty} A^k}}_{\substack{l = k-1 \\ k = l+1}} - \cancel{\sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1}} \qquad \sum_{l=0}^{\infty} A^{l+1}$$

$$= E_n$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ ist inverse Matrix zu $(E_n - A)$.

Stetigkeit und GPS

$\xrightarrow{\text{Satellit}}$

Mess-daten x $\xmapsto{f}$ berechnete Ortskoor-dinaten $f(x)$

ideale Daten x_0 $\xmapsto{f}$ korrekte Ortskoor-dinaten $f(x_0)$

Wunsch: $\|f(x) - \overset{f(x_0)}{\cancel{y_0}}\| < 10\text{cm} =: \varepsilon$

Frage: Wie genau muss x gemessen werden?

$\|x - x_0\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$

Wie klein muss $\delta > 0$ gewählt werden?

$$(E_n - A)\cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = E_n \sum - A \cdot \sum$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1}$$

$$= A^0 + \underbrace{\cancel{\sum_{k=1}^{\infty} A^k}}_{\substack{l=k-1\\ k=l+1}} - \cancel{\sum_{k=0}^{\infty} A^{k+1}} \qquad \sum_{l=0}^{\infty} A^{l+1}$$

$$= E_n$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} A^k$ ist inverse Matrix zu $(E_n - A)$.

5. Stetigkeit

5.1 Um was geht's

5.1 Def und Satz: Seien (E, d_E) und (F, d_F) metrische Räume und

$$f: E \supseteq D(f) \longrightarrow F \qquad x_0 \in D(f)$$

Dann heißt f **stetig in x_0**, falls

(i) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ \forall x \in D(f): d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

(ε-δ-Kriterium)

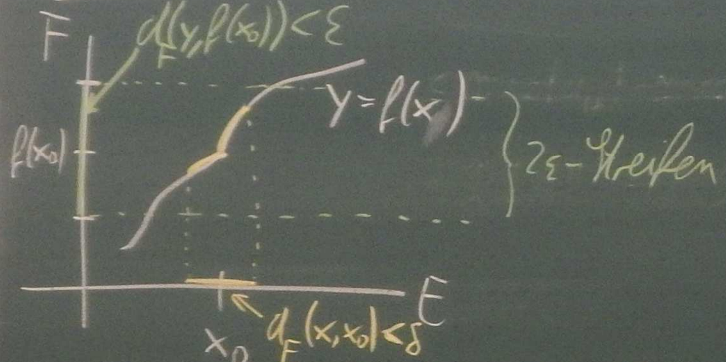
oder äquivalent dazu

(ii) Für jede Folge (x_n) in $D(f)$ mit $x_n \to x_0$ gilt auch $f(x_n) \to f(x_0)$, d.h.

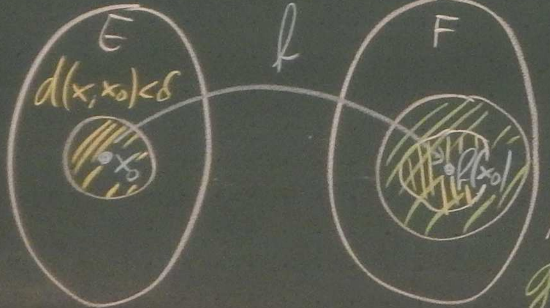
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \qquad \text{(Folgenkriterium)}$$

f heißt **stetig**, falls f in jedem $x_0 \in D(f)$ stetig ist

5.2 Diskussion 1) Bilder:

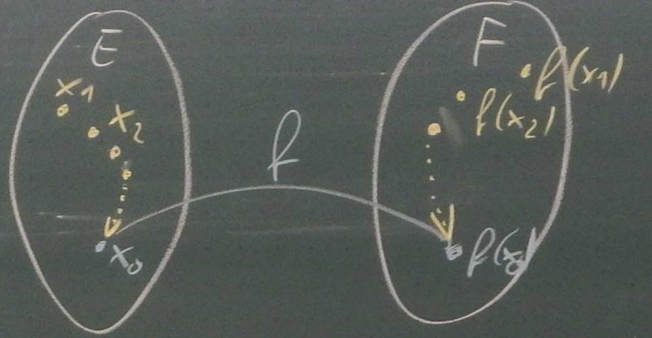


gelb gefärbter Teil des Graphen muss im 2ε-Streifen liegen



$d(y, f(x_0)) < \varepsilon$

Bild der gelben Menge muss in der grünen Menge liegen



2) Konstante Fktn sind stetig:

$$f(x) = c \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$$

Eine der wichtigsten stetigen Fktn:

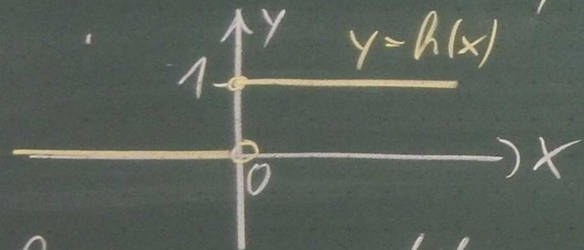
$$id : E \to E : x \mapsto x$$

Wähle $\delta := \varepsilon$. Dann

$$d(id(x), id(x_0)) = d(x, x_0) < \delta = \varepsilon$$

3) Heaviside-Fkt, Einschaltfkt.

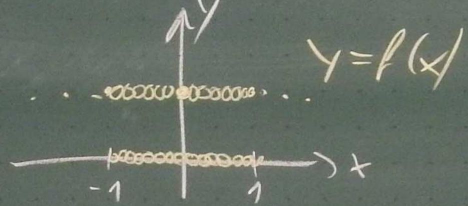
$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



h ist in $x_0 = 0$ unstetig:

$$x_n := \frac{-1}{n} \Rightarrow \begin{cases} x_n \to 0 \\ h(x_n) = 0 \to 0 \\ \text{aber } h(x_0) = 1 \neq 0 \end{cases}$$

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

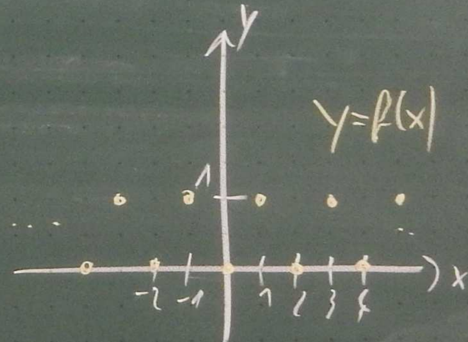


f ist nirgends stetig

5) Unglaublich, aber wahr:

$D(f) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1 \text{ für } x \text{ ungerade} \\ 0 \text{ für } x \text{ gerade} \end{cases}$$



f ist stetig

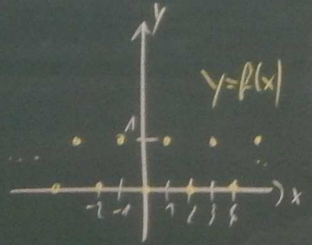
Ist (x_n) Folge in $D(f) = \mathbb{Z}$, $x_n \to 2$

$\Rightarrow x_n = 2$ für $n \geq N_0$ $\Rightarrow f(x_n) = f(2)$ für $n \geq N_0$

$\to \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$y = f(x)$ f ist nirgends stetig

aber wahr:



für x ungerade

für x gerade

$D(f) = \mathbb{Z}$, $x_n \to 2$

$\geq N_0 \Rightarrow f(x_n) = f(2)$ für $n \geq N_0$

6) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: (x,y) \mapsto x \cdot y$

ist stetig:

$$d = d((x,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \geq \begin{cases} |x-x_0| \\ |y-y_0| \end{cases}$$

$$|x \cdot y - x_0 \cdot y_0| \leq |x \cdot y - x_0 \cdot y| + |x_0 \cdot y - x_0 y_0|$$

$$= |y| \underbrace{|x - x_0|}_{\leq d} + |x_0| \underbrace{|y - y_0|}_{\leq d}$$

$$\leq |y - y_0| + |y_0| \leq d + |y_0|$$

$$\leq d(d + |y_0| + |x_0|)$$

Betrachte $d \leq 1$

$$\leq d(1 + |x_0| + |y_0|)$$

$$< \varepsilon \text{ für } d < \frac{\varepsilon}{1 + |x_0| + |y_0|} =: \delta$$