

5.3 Rechenregeln: Seien E, V

Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und
 $f, g: E \supset D \rightarrow F, x_0 \in D$. Dann

1) $f+g, \lambda f, \|f\|: x \mapsto \|f(x)\|$ sind
stetig in x_0 , denn:

$$x_n \rightarrow x_0 \xrightarrow[\text{Folgerung}]{\text{Aussage}} \begin{cases} f(x_n) \rightarrow f(x_0) \\ g(x_n) \rightarrow g(x_0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x_n) + g(x_n)}_{=(f+g)(x_n)} \rightarrow \underbrace{f(x_0) + g(x_0)}_{=(f+g)(x_0)}$$

$\Rightarrow f+g$ stetig in x_0 .

2) Ist $F = \mathbb{R}$ oder $F = \mathbb{C}$, so ist $f \cdot g$ stetig in x_0 .

Ist zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}: x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$
stetig in x_0 .

3) Ist $F = \mathbb{C}$, so sind $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ stetig in x_0 .

(denn $|\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)|$)

5.4 Folgerung: Aus 1): $C(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig}\}$
ist ein Vektorraum.

Mehrfach 57 $\Rightarrow$ $P: x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ist stetig

3) Seien $n, q \in \mathbb{N}$ fest.

Nachher: $q\sqrt{\cdot}: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[: x \mapsto x^{q/4}$

52 $\Rightarrow g: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[: x \mapsto x^{n/4}$ int. stetig

ist stetig.

5.2 Ketige Funktionen sind gute Fkten

5.7 Satz: Sei $f: E \supseteq D(f) \rightarrow F$ stetig in $x_0 \in D(f)$

und $y_0 \neq f(x_0)$. Dann

Beweis: Wähle $\varepsilon := d_F(f(x_0), y_0) > 0$
 und δ so wie in Def. der Stetigkeit
 Für $x \in D(f)$ und $d_E(x, x_0) < \delta$ gilt

$$d_F(f(x), y_0) \geq \underbrace{|d(f(x), f(x_0))|}_{< \varepsilon} - \underbrace{d(f(x_0), y_0)}_{= \varepsilon} > 0$$

$\Rightarrow f(x) \neq y_0$ $\square$

5.8 Zwischenwertsatz von Bolzano:

Sei $f: \mathbb{R} \supseteq D(f) = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann nimmt $f(x)$ alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Im Fall $f(a) < f(b)$ bedeutet dies:

$$\forall y \in]f(a), f(b)[\quad \exists x \in]a, b[: f(x) = y$$

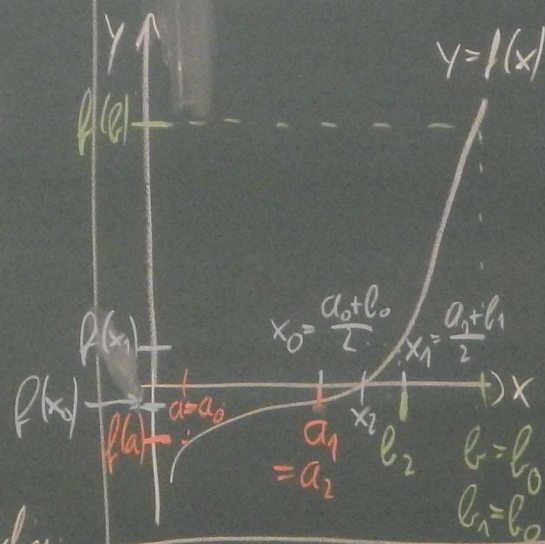
Insbesondere:

$$f(a) < 0 \wedge f(b) > 0$$

$$\Rightarrow \exists x \in]a, b[: f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, z) + d(z, y) \\ d(x, y) &\geq |d(x, z) - d(z, y)| \end{aligned}$$

Beweisidee:



$$\Rightarrow a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow a$$

$$f(a_n) \leq 0 \Rightarrow f(a) \leq 0$$

$$f(b_n) \geq 0 \Rightarrow f(b) \geq 0 \quad \square$$

$$a_0 := a, \quad b_0 := b, \quad x_0 := \frac{a_0 + b_0}{2}$$

Fall $f(x_0) = 0 \Rightarrow$ fertig

Fall $f(x_0) < 0$:

$$\text{Setze } a_1 := x_0, \quad b_1 := b_0, \quad x_1 := \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Fall $f(x_0) > 0$:

$$\text{Setze } a_1 := a_0, \quad b_1 := x_0$$

(a_n) mon. wachsend

(b_n) mon. fallend

$$a_n \leq b_n \quad a_n \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{2^n} (a_0 - b_0)$$

5.9 Diskussion: 1) Vollständigkeit benötigt.

2) Beweis gibt ein iteratives Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle.

3) Jedes reelle Polynom ungerader Ordnung besitzt mindestens eine reelle Nullstelle:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{a_n} &= \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{a_n} \\ &= x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n} \right) \end{aligned}$$

$\begin{matrix} > 0 \text{ f. } x > 0 \\ < 0 \text{ f. } x < 0 \end{matrix}$ $\rightarrow 1 \text{ für } x \rightarrow \pm \infty$
 $> 0 \text{ für } |x| > R$

$$\Rightarrow \exists x_1, x_2: P(x_1) < 0 \wedge P(x_2) > 0$$

Zwischenwertsatz: P besitzt Nullstelle $\xi \in]x_1, x_2[$.

Hinweise:

- Reihe, Teilsummenfolge, Reihenkonvergenz
- Geometrische Reihe, Harmonische Reihe
- Kriterien: Major-, Minor-, Nullfolge-, Quotienten- und Wurzelkriter.
- Zusammenhang e^z , $\cos(z)$, $\sin(z)$
- Def der Stetigkeit allgemein und wenn E oder F oder beide $\rightarrow \mathbb{R}$ sind.

5.3 Umkehrfunktionen

5.13 Def: $f: \mathbb{R} \supseteq D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

(streng) monoton wachsend, falls

$$\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\underline{f(x_1) < f(x_2)})$$

Entsprechend (streng) mon fallend:

$$\forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

5.14 Beisp: 1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 1$ ist mon.

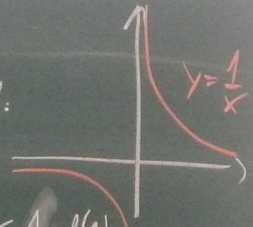
fallend u mon. wachsend.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto x$ ist streng mon. wachsend
 $x \mapsto -x$ " " " fallend

3) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x}$

ist nicht mon. fallend:

$$-1 < 1, \text{ aber } f(-1) = -1 < 1 = f(1)$$



Aber: $f|_{\mathbb{R}_{>0}}$ ist streng mon. fallend.

5.15 Satz: f streng mon. wachsend $\Rightarrow f$ injektiv
oder f " " fallend

Beweis: Zeige: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sei $x_1 \neq x_2$. Fall $x_1 < x_2$ $\xRightarrow[\text{wachsend}]{\text{streng mon.}}$ $f(x_1) < f(x_2)$

Fall $x_2 < x_1$ $\xRightarrow{\text{fallend}} f(x_2) < f(x_1)$
 $\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ $\square$

5.16 Satz: Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
und streng mon. wachsend. Dann
ist $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ bijektiv.

Die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

ist stetig und streng mon. wachsend.

Genauso für streng mon. fallendes f .

" " offene Intervalle

Beweis: 1) f ist injektiv, da f streng mon.

2) f ist surjektiv. $\text{Bild}(f) = [f(a), f(b)]$

$$x \in [a, b] \Rightarrow a \leq x \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

$$\Rightarrow \text{Bild}(f) \subseteq [f(a), f(b)]$$

$$\text{Sei } y \in [f(a), f(b)] \stackrel{\substack{f \text{ stetig} \\ \text{Zwischen-} \\ \text{Wertsatz}}}{\Rightarrow} \exists x \in [a, b]: f(x) = y$$

$$\Rightarrow \text{Bild}(f) \supseteq [f(a), f(b)]$$

1) $\wedge$ 2) $\Rightarrow f$ ist bijektiv.

$$3) \text{ Zeige: } y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

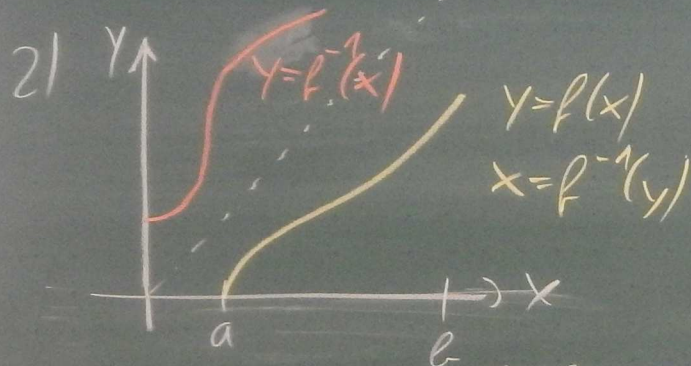
$$\text{Sei } y_1 < y_2. \text{ Annahme: } f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$$

$$\stackrel{\substack{f \text{ streng} \\ \Rightarrow \\ \text{mon. wachsend}}}{f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))}$$

$$\Rightarrow y_1 \geq y_2 \quad \nabla$$

3. f^{-1} ist stetig: Siehe Skript.

5.17 Bem: 1) $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$



Der Graph der Umkehrfkt.

$x = f^{-1}(y)$ ist derselbe wie
der Graph $y = f(x)$ der Fkt.

Man zeichnet lieber den Graph
 $y = f^{-1}(x)$. Dieser entsteht durch

Spiegelung an 1 Winkelhalbierender.

5.18 Wurzelfunktion: Für festes $m \in \mathbb{N}$ setze

$$f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[: x \mapsto x^m.$$

1) f ist stetig

2) f ist streng monoton wachsend, also injektiv

3) f ist surjektiv: $f(0) = 0$, $f(b) = b^m > b$ für alle $b > 1$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow \exists x \in [0, \infty[: f(x) = b$

Für $b \in [0, 1] = [f(0), f(1)] : \exists x : f(x) = b$

$\Rightarrow$ Umkehrfkt. $\sqrt[m]{\cdot} : x \mapsto f^{-1}(x)$ ist stetig.

Allgemein: $q \in \mathbb{Q}, q \geq 0 : f: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[: x \mapsto x^q$ ist stetig

$q \in \mathbb{Q}, q < 0 : f:]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[: x \mapsto x^q$ ist stetig

$\in \mathbb{N}$ oder

negativ

$> b$ für alle $b > 1$

$x \neq 0$

$x \neq 0$

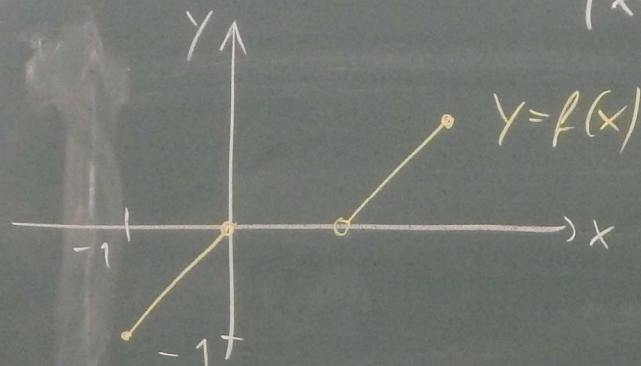
stetig

$0, \infty[: x \mapsto x^q$ ist stetig

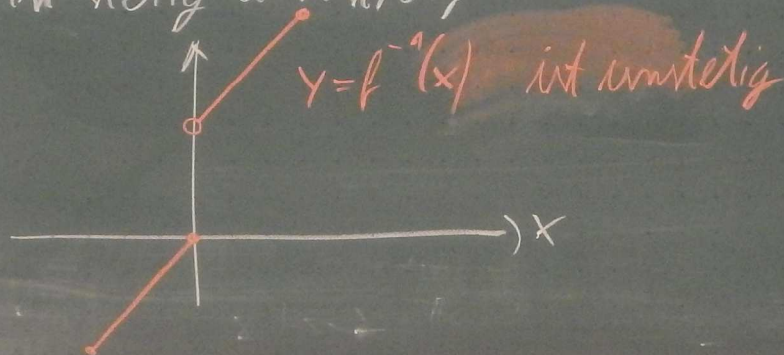
$0, \infty[: x \mapsto x^q$ ist stetig

Achtung:

$$f: [-1, 0] \cup]1, 2] : x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } -1 \leq x \leq 0 \\ x-1 & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



f ist stetig und streng monoton wachsend



3) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$
ist nicht monoton fallend:

$-1 < 1$, aber $f(-1) = -1 < 1$

Aber: $f|_{]0, \infty[}$ ist streng monoton fallend

5.15 Satz: f streng monoton wachsend
oder f " " fallend

Beweis: Zeige: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sei $x_1 \neq x_2$. Fall $x_1 < x_2$

Fall $x_2 < x_1$

$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$