5.4 Stetigkeit von Grenzfunktionen

5.19 Beispiele: 1) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (x^2)^n$

Was passiert für $n \to \infty$?

Für jedes feste x liegt eine Folge $(x^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ vor.

Fall $x^2 < 1$: $(x^2)^n \to 0$

Fall $x^2 = 1$: $1^n \to 1$

Fall $x^2 > 1$: $(x^2)^n \to \infty$

2) $f_n \; \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x^{2n}}$

Fall $x^2 < 1$: $\frac{1}{1+x^{2n}} \to \frac{1}{1+0} = 1$

Fall $x^2 = 1$: $\frac{1}{1+1} \to \frac{1}{2}$

Fall $x^2 > 1$: $\frac{1}{1+x^{2n}} \to 0$

Grenzfunktion $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = \pm 1 \\ 0 & \text{für } |x| > 1 \end{cases}$

3) $f_n : [-2, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 + \frac{x}{n}$

$f_n(x) \to 1$ für jedes feste $x \in [-2, 2]$

Grenzfunktion $f(x) = 1$ für $|x| \leq 2$

5.20 Def: Seien $f, f_n : E \supseteq D \to F$ Funktionen, ~~(E, d_E)~~, (F, d_F) metrischer Raum.

1) Die Folge (f_n) heißt <u>punktweise konvergent gegen f</u>, falls für jedes feste $x \in D$ gilt: $f_n(x) \to f(x)$.

d.h.

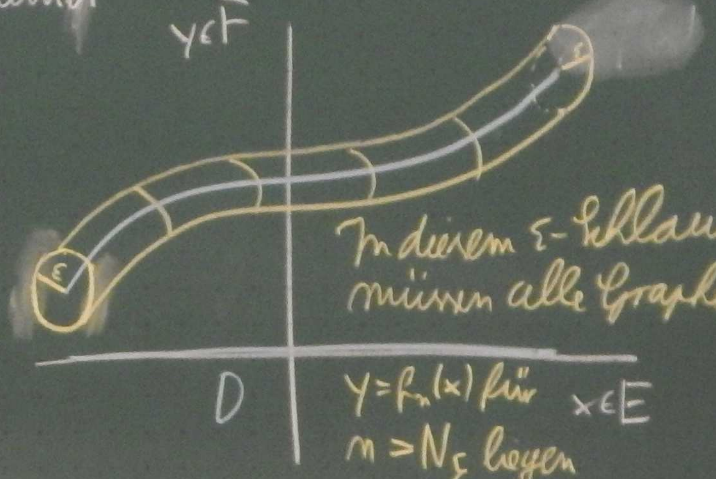
$$\underline{\forall x \in D}\ \forall \varepsilon > 0\ \underbrace{\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}}_{N_\varepsilon \text{ kann von } x \text{ abhängen}}\ \forall n > N_\varepsilon : d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

2) (f_n) heißt <u>gleichmäßig konvergent gegen f</u> (auf D), falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \underbrace{\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}}_{N_\varepsilon \text{ muss unabhängig von } x \text{ sein}}\ \forall n > N_\varepsilon\ \underline{\forall x \in D} : d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Schreibweise: $f = \lim_{n \to \infty} f_n$ auf D punktweise / gleichmäßig.

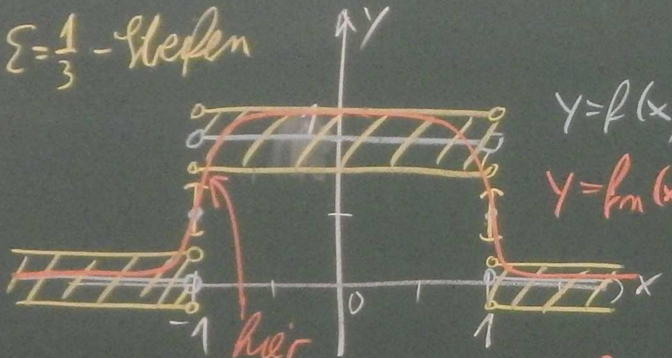
5.21 Diskussion: 1) $f_n \to f$ gleichmäßig bedeutet:



2) Beispiel 1: f_n konvergiert weder punktweise noch gleichmäßig

Beispiel 2: (f_n) konvergiert punktweise gegen f. Auch gleichmäßig?

$\varepsilon = \frac{1}{3}$-Streifen



hier verlässt $y = f_n(x)$ den ε-Streifen

Jeder Graph von f_n geht durch die Punkte $(-1, \frac{1}{2})$, $(1, \frac{1}{2})$

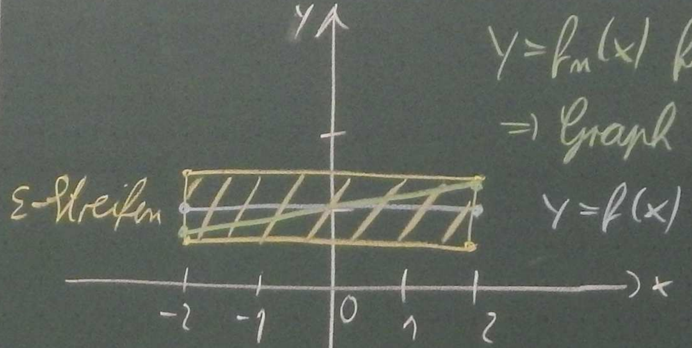
Also: (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig gegen f.

Beispiel 3: $f_n \to f: x \mapsto 1$ punktweise

$y = f_n(x)$ für $\frac{2}{n} < \varepsilon$ bzw. $n > \frac{2}{\varepsilon}$

$\Rightarrow$ Graph liegt im ε-Streifen

ε-Streifen



$\Rightarrow f_n \to f$ gleichmäßig auf $[-2, 2]$

3) $f_n \to f$ gleichmäßig $\Rightarrow f_n \to f$ punktweise

Also: zuerst punktweise Grenzfunktion berechnen.

4) Rechenregeln für konv. Folgen übertragen sich, z. B.

$f_n \to f$ glm $\wedge$ $g_n \to g$ glm $\Rightarrow$ $f_n + g_n \to f + g$ glm

5) Reihen: Eine Reihe kann gleichmäßig oder punktweise, absolut oder bedingt konvergieren

5.22 Satz: Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig:

f_n stetig für $n \in \mathbb{N}$
$f_n \to f$ gleichmäßig auf D $\Big\}$ $\Rightarrow$ f ist stetig auf D

5.23 Kriterien für gleichm. Konvergenz:

1) **Cauchy-Kriterium:** Sei (F, d_F) ein vollst. metrischer Raum. Falls

$f: D \to F$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \underbrace{\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}}_{\text{unabhängig von } x} \ \forall n, m > N_\varepsilon \ \forall x \in D \quad d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

Dann existiert $f(x): D \to F: x \mapsto \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ und $f_n \to f$ gleichmäßig.

2) **Weierstraß-Kriterium:** Falls $(V, \|\cdot\|)$ ein vollständiger Vektorraum ist und (c_n) eine reelle Folge mit $c_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f_n: D \to V$ und

$$\forall n \in \mathbb{N}: \|f_n\| \leq c_n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty \ (\text{d.h. } \textstyle\sum c_n \text{ konv.})$$

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ auf D gleichmäßig konvergent.

5.24 Beispiele: 1) Die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z} \quad \text{für } z \in \mathbb{C}, |z| < 1$$

Sei $0 < q < 1$ fest gewählt.

Behauptung: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ konv. gleichmäßig für $|z| \le q$

Beweis: Setze $c_n = q^n \ge 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \frac{1}{1-q} < \infty \\ |z^n| = |z|^n \le q^n \end{cases}$$

$V = \mathbb{C}$ ist vollständig

Weierstraß $\Rightarrow$ gleichm. Konvergenz

Aber: $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist nicht gleichmäßig konv. auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, denn

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^k\right| = \left|\frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| = \underbrace{\frac{|z^{n+1}|}{|1-z|}}_{\text{nimmt Wert} > \varepsilon \text{ an}} \xrightarrow{z \to 1} \infty$$

2) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x^{2n}}$

$$f_n \to f : x \mapsto \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{punktweise}$$

f nicht stetig $\Rightarrow$ keine gleichm. Konv. auf $\mathbb{R}$

Aber: $g_n := f_n|_{[2,\infty[} : [2,\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1+x^{2n}}$

$g_n \to g : x \mapsto 0$ gleichmäßig auf $[2,\infty[$, denn

$$|g_n(x) - g(x)| = \left|\frac{1}{1+x^{2n}} - 0\right| = \frac{1}{1+(x^2)^n}$$

$$\overset{x^2 \ge 4}{\le} \underbrace{\frac{1}{1+4^n}}_{\text{hängt nicht von } x \text{ ab}} < \varepsilon \text{ für } n > N_\varepsilon$$

5.25 Potenzreihen: Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ eine Potenzreihe mit $R \in [0,\infty]$. Dann

1) Für $\rho \in]0,R[$ gilt: Die Potenzreihe konvergiert gleichm. auf der Menge $\{z : |z-z_0| \leq \rho\}$

Insbesondere ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ stetig auf $\{z : |z-z_0| \leq \rho\}$

2) Die Grenzfunktion $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ ist stetig auf $\{z : |z-z_0| < R\}$

Beweis von 2): Sei $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ und $z_1 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1 - z_0| < R$. Wähle $\rho \in \mathbb{R}$ mit $|z_1 - z_0| < \rho < R$

Nach 1) ist f stetig auf $\{z : |z-z_0| \leq \rho\}$

$\Rightarrow f$ ist in z_1 stetig $\square$

5.26 Anwendung: 1) $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ mit $R = \infty$

5.25 $\Rightarrow e^{(\cdot)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto e^z$ ist stetig

Genauso: $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ sind stetig auf $\mathbb{C}$

2) $\ln(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (z-1)^{k+1}$ mit $R = 1$

5.25 $\Rightarrow \ln(\cdot)$ ist stetig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$

3) Für jede quadratische Matrix A ist $t \mapsto e^{tA}$ stetig

§ 27 Der reelle Logarithmus: Für die Fkt

$$e^{(\cdot)}: \mathbb{R} \to \overset{]0,\infty[}{\mathbb{R}} : x \mapsto e^x$$

gelten:

1) $e^{(\cdot)}$ ist stetig (da $z \mapsto e^z$ stetig)

2) $e^{(\cdot)}$ ist streng mon. wachsend:

Für $0 < x < x'$ gilt $x^n < (x')^n$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x')^k}{k!} = e^{x'}$$

Für negative x verwende $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$

$\Rightarrow e^{(\cdot)}$ ist injektiv

3) $e^{(\cdot)}$ ist surjektiv, denn $e > 1$

$\Rightarrow e^n \to \infty$, $e^{-n} \to 0$

$\overset{\text{Zwischenwertsatz}}{\Rightarrow}$ $\forall y \in]0,\infty[\; \exists x \in \mathbb{R} : e^x = y$

$\Rightarrow$ Es exist. Umkehrfunktion $\ln :]0,\infty[\to \mathbb{R}$

und sie ist stetig und streng mon. wachsend.