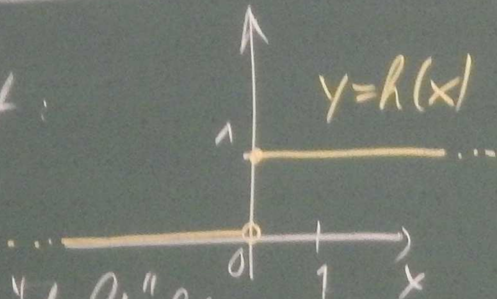
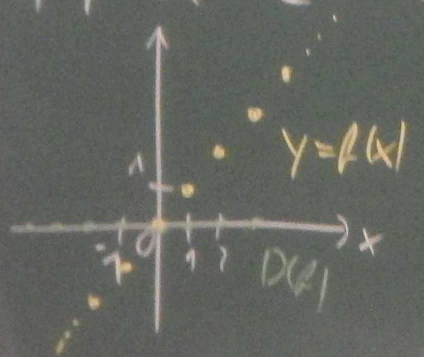
5.5 Grenzwerte von Fkten

5.28 1) Heaviside-Fkt:



Für x "von oben" gegen 0 "strebt" $h(x)$ gegen 1
" x "von unten" " " " " " 0

2) $f: \mathbb{R} \supseteq \mathbb{Z} \to \mathbb{R} : n \mapsto n$



Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ ist nicht sinnvoll

5.29 Def: Sei (E,d) metr. Raum und $M \subseteq E$, $x_0 \in E$. Dann heißt x_0 Häufungspunkt von M, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 : \Big(\underbrace{B_\varepsilon(x_0)}_{=\{x \in E : d(x,x_0) < \varepsilon\}} \setminus \{x_0\}\Big) \cap M \neq \emptyset$$

oder äquivalent

$\exists (x_n)$ Folge in M: $x_n \neq x_0 \wedge x_n \to x_0$.

$x_0 \in M$ heißt isolierter Punkt von M, falls x_0 kein Häufungspkt von M ist.

Beisp. 1) $E=\mathbb{R}$, $M=\,]-\infty,0[$, $x_0=0$

z.B. $x_n=-\frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $x_n\in M$, $x_n\neq 0$, $x_n\to x_0$

$\Rightarrow$ 0 ist Häufungspkt. von M.

Genauso ist 0 Häufungspkt. von $]-\infty,0]$

2) $E=\mathbb{R}$, $M=\,]-\infty,0[\,\cup\{1\}$

$x_0=1$ ist isolierter Pkt. von M

Alle $x_0\leq 0$ sind Häufungspkte von M

3) $E=\mathbb{R}$, $M=\mathbb{Z}$ besteht nur aus isolierten Punkten.

5.30 Def: Seien (E,d_E), (F,d_F) metr. Räume, $f: E\supseteq D\to F$ Funktion und $x_0\in E$.

1) Schreibe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$, falls

x_0 Häufungspkt von D und

$\forall (x_n)$ Folge in D: $(x_n\to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to a)$

2) Spezialfall $F=\mathbb{R}$: Falls x_0 Häufungspkt. von D ist und für jede Folge (x_n) in D gilt:

$$x_n\to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to\infty,$$

schreibe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$. Analog $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

3) Spezialfall $E=F=\mathbb{R}$. Schreibe

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x) = a \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\uparrow x_0} f(x) = a,$$

falls x_0 Häufungspunkt von $D\cap\,]x_0,\infty[$ bzw. $D\cap\,]-\infty,x_0[$

und für jede Folge (x_n) in $D\cap\,]x_0,\infty[$ bzw. $D\cap\,]-\infty,x_0[$ gilt

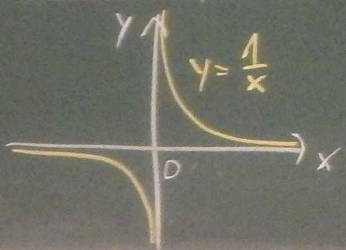
$$x_n\to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to a$$

Analog: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$, $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)=\pm\infty$

$\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)=\pm\infty$.

5.31 Beispiele: 1) $\lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{1}{x}=\infty$

$\lim\limits_{x\uparrow 0}\frac{1}{x}=-\infty$



2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\downarrow 1}\frac{x^2-1}{x-1} = 2$

3) $\lim\limits_{x\downarrow 0} h(x) = 1$, $\lim\limits_{x\uparrow 0} h(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ existiert nicht, denn: $x_n=\frac{1}{n}\to 0 \wedge h(x_n)=1\to 1$

$x_n=-\frac{1}{n}\to 0 \wedge h(x_n)=0\to 0$

5.32 Bem: 1) Falls $F=\mathbb{R}$ oder $F=\mathbb{C}$: Rechenregeln für konv. Folgen übertragen sich sinngemäß, z.B.

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)}_{\text{falls existent}}$$

Falls $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$

2) Gilt $x_0 \notin D$ und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, dann ist

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in D \\ a & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0: f ist <u>stetig ergänzbar</u> in x_0 oder <u>stetig fortsetzbar</u> nach x_0

3) Spezialfall $E = \mathbb{R}$. Sei $x_0 \in D$ Häufungspunkt von $D \cap \,]x_0, \infty[$ und von $D \cap \,]-\infty, x_0[$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in x_0

(ii) $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$

Beweis durch Folgenkrit. für Stetigkeit

<u>5.33 Grenzwerte mit Potenzreihen</u>: z.B. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{1-\cos(x)}$

$$\ln(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{k+1} \quad \text{für } |z| < 1$$

$$\Rightarrow \ln(x^2) = x^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{2k\cancel{+2}}}_{= g(x) \text{ stetig}} \quad \text{für } |x| < 1$$

$$g(0) = \frac{(-1)^0}{1} = 1$$

$$1 - \cos(x) = 1 - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}}_{= 1 \text{ für } k = 0} = -x^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k-2}}_{=: f(x) \text{ stetig}}$$

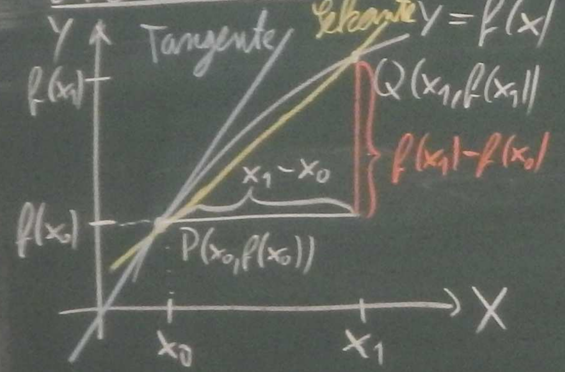
$$f(0) = \frac{(-1)^1}{2!} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{1-\cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}\, g(x)}{-\cancel{x^2}\, f(x)} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} g(x)}{-\lim_{x\to 0} f(x)} = \frac{g(0)}{-f(0)} = \frac{1}{-(-\frac{1}{2})} = 2$$

6 Differentialrechnung in einer Var.

6.1 Die Ableitung



Sekantensteigung

$$m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Gegeben: Funktion f

Gesucht: Tangente an den Graphen im Punkt $(x_0, f(x_0))$

Für $x_1 \to x_0$ nähert sich die Sekantensteigung an die Tangentensteigung

6.1 Def: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $f: \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$, $x_0 \in D$, x_0 Häufungspkt von D.

1) Die Abbildung $\Delta f: D \to \mathbb{K}: x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ heißt Differenzenquotient.

2) f heißt differenzierbar in x_0, falls Δf in x_0 stetig ergänzbar ist, d.h. falls

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\, x\in D \\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0) \text{ existiert.}$$

$$= \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

In diesem Fall heißt $f'(x_0)$ die Ableitung von f in x_0.

3) f heißt <u>differenzierbar</u>, falls f in jedem $x_0 \in D$ differenzierbar. Dann heißt die Funktion $f' : D \to \mathbb{K} : x \mapsto f'(x)$ heißt <u>Ableitung</u> von f.

<u>6.2 Beisp:</u> 1) Konstante Fkt. $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : x \mapsto c$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0, \text{ also } f' = 0$$

2) Identische Abb: $Id : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : x \mapsto x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1, \text{ also } f'(x) = 1 \text{ für } x \in \mathbb{K}.$$

3) Exponentialfkt $e^{(\cdot)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto e^z$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\underbrace{e^z - e^{z_0}}_{= e^{z_0}(e^{z - z_0} - 1)}}{z - z_0} \overset{y = z - z_0}{=} \lim_{y \to 0} \frac{e^{z_0}(e^y - 1)}{y}$$

Nebenrechnung: $e^y - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} - 1 = y \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{k-1}}{k!}}_{=: g(y)}$ stetig (Potenzreihe)

$g(0) = 1$

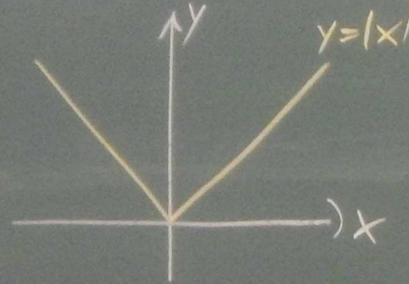
$$= \lim_{y \to 0} \frac{e^{z_0} \cancel{y}\, g(y)}{\cancel{y}} = e^{z_0} \cdot g(0) = e^{z_0}$$

$\Rightarrow (e^z)' = e^z$ für $z \in \mathbb{C}$, insbesondere $(e^x)' = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, denn

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)-0}{x-0} &= \lim_{x \downarrow 0} \frac{x-0}{x-0} = 1 \\ \lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x)-0}{x-0} &= \lim_{x \uparrow 0} \frac{-x-0}{x-0} = -1 \end{aligned}\right\} \neq \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-0}{x-0}$$

existiert nicht



An „Knickstellen" ihres Graphen sind Funktionen nicht diffbar.

6.3 Satz: $f: \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$ diffbar in x_0. Dann ist f stetig in x_0.

Beweis: Sei $x_n \to x_0$. Zeige $f(x_n) - f(x_0) \to 0$.

$$f(x_n) - f(x_0) = \left.\begin{cases} \underbrace{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}}_{\to f'(x_0)} \cdot \underbrace{(x_n - x_0)}_{\to 0} & \text{für } x_n \neq x_0 \\ 0, & x_n = x_0 \end{cases}\right\} \to 0 \text{ für } n \to \infty$$

□

6.4 Bem: Komplexe differenzierbare Fkten haben erstaunliche Eigenschaften.

6.5 Rechenregeln: Seien $f, g: \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$ differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann:

1) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ ist λf diffbar in x_0 mit $(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$
2) $f+g$ ist diffbar in x_0 mit $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ (Summenregel)
3) $f \cdot g$ " " " " $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ (Produktregel)
4) Falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann ist $\frac{f}{g}$ in x_0 diffbar mit $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ (Quotientenregel)