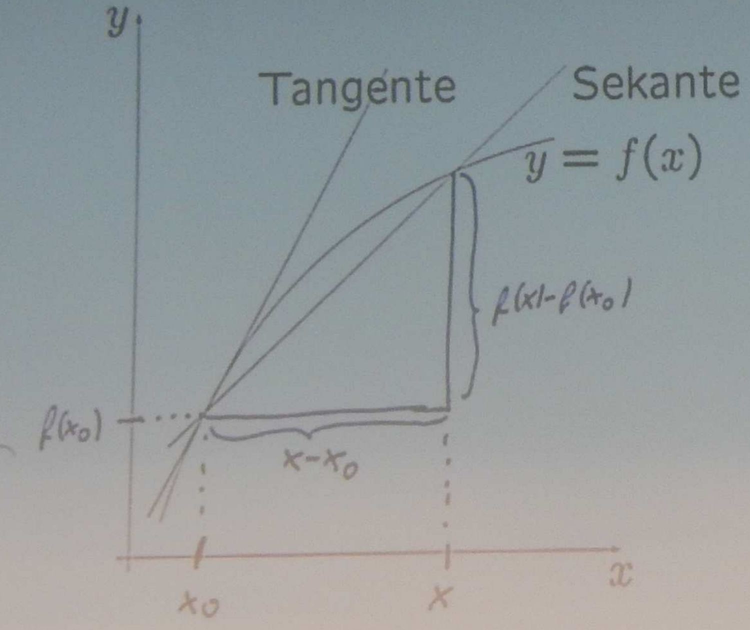


f heißt **differenzierbar in** x_0, falls

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D,\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert die **Ableitung von** f **in** x_0.

f heißt **differenzierbar** (in D), falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Die Funktion f' heißt **Ableitung** von f.

Rechenregeln Seien $f, g : \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$ differenzierbar (in $x_0 \in D$). Dann gelten

1) $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{K}$ fest) ist differenzierbar in x_0, und es gilt $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

2) $f + g$ ist differenzierbar in x_0, und es gilt $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

3) $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 mit

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

(**Produktregel**).

4) Falls zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

(**Quotientenregel**)

Beispiele: 1) Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $f_n: x \mapsto x^n$

$n=0$: $f_0(x) = 1 \Rightarrow f_0'(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$

$n=1$: $f_1(x) = x \Rightarrow f_1'(x) = 1$ "

$n=2$: $f_2(x) = x^2 = f_1(x) \cdot f_1(x)$

Produktregel $\Rightarrow$ $f_2'(x) = f_1'(x) f_1(x) + f_1(x) f_1'(x)$

$= 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$

$n=3$: $f_3(x) = x^3 = f_1(x) \cdot f_2(x)$

$\Rightarrow f_3'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$

$\vdots$ vollst. Induktion

$\Rightarrow f_n'(x) = n x^{n-1}$

2) Sei $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{f_0(x)}{f_n(x)}$

Für $x \neq 0$: $g'(x) = \frac{\underbrace{f_0'(x)}_{=0} f_n(x) - f_0(x) f_n'(x)}{f_n^2(x)} = \frac{-1 \cdot n x^{n-1}}{x^{2n}}$

$= (-n) x^{-n-1}$

3) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2+1) - (2x+3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 6x + 2}{(x^2+1)^2}$

Rechenregel 5: Ableitung der Umkehrfkt: Sei $D = [a, b]$ und $f: D \to \mathbb{R}$ streng mon und stetig, $x_0 \in]a, b[$. Dann

* f in x_0 diffbar und $f'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow f^{-1}$ ist in $f(x_0)$ diffbar und $f^{-1\prime}(\underbrace{f(x_0)}_{=: y_0}) = \frac{1}{f'(\underbrace{x_0}_{f^{-1}(y_0)})}$

* Damit $f: D \to f(D)$ bijektiv, $f^{-1}: f(D) \to D$ die Umkehrfkt.

Schreibe $f^{-1\prime}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Beispiele: 1) $f: [0,\infty[\to [0,\infty[: x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$ fest)

$\Rightarrow f^{-1}: [0,\infty[\to [0,\infty[: y \mapsto y^{1/n}$

Rechenregel 5 $\Rightarrow$ $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{n\left(f^{-1}(y)\right)^{n-1}}$

$= \frac{1}{n\left(y^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n} y^{-1+\frac{1}{n}}$

Folg: Für $r = \frac{1}{n}$ und $f(x) = x^r$ gilt $f'(x) = r x^{r-1}$

2) $f: \mathbb{R} \to]0,\infty[: x \mapsto e^x$, $f'(x) = e^x$

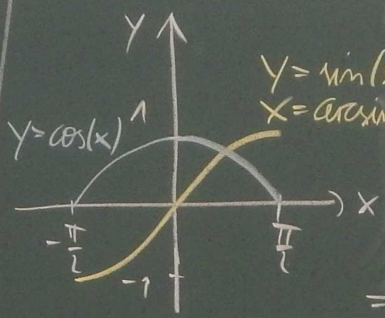
$f^{-1}:]0,\infty[\to \mathbb{R} : y \mapsto \ln(y)$

Rechenregel 5 $\Rightarrow$ $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}\ln(y) = \frac{1}{y}$

3) $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1] : x \mapsto \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$ siehe nachher



$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}$

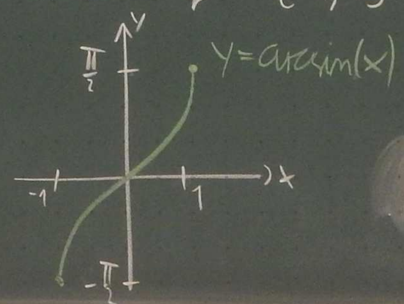
$\Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

$\Leftrightarrow |\cos(x)| = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$

$\Rightarrow$ Für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$: $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ (*)

f ist streng mon wachsend und surjektiv

$\Rightarrow \arcsin := f^{-1}: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : x \mapsto \arcsin(x)$



Rechenregel 5 $\Rightarrow$

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \overset{(*)}{=}$

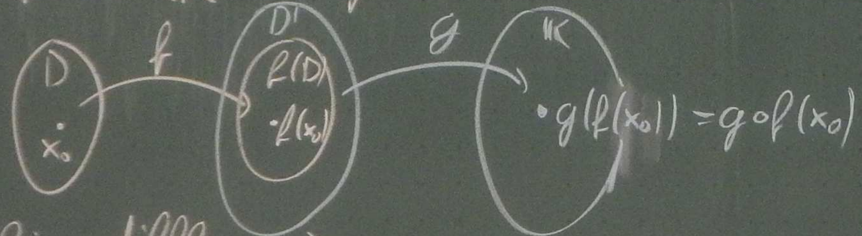
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(y))}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy}\arcsin(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

insbes. $\lim\limits_{\substack{y\uparrow 1\\ y\downarrow -1}} \arcsin(y) = \infty$

Rechenregel 6: Kettenregel:

Seien $f: D \to \mathbb{K}$ und $g: D' \to \mathbb{K}$ und $f(D) \subseteq D'$



$\left.\begin{array}{l}\text{Falls } f \text{ in } x_0 \text{ diffbar}\\ \text{und } g \text{ in } f(x_0) \text{ diffbar}\end{array}\right\} \Rightarrow g\circ f$ ist in x_0 diffbar und

$$(g\circ f)'(x_0) = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{äußere}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere}} \text{ Ableitung}$$

Beisp: 1) $f(x) = (1+\sqrt{x})^5 = g\circ h(x)$ mit
$h(x) = 1+\sqrt{x}$, $g(y) = y^5$

$$\Rightarrow f'(x) = 5(1+\sqrt{x})^4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) Sei $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, $r = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$,

$f: [0,\infty[\to [0,\infty[: x \mapsto x^r = g\circ h(x)$

$h(x) = x^{1/q}$ und $g(y) = y^p$

$$\Rightarrow f'(x) = p\left(x^{1/q}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{q} x^{\frac{1}{q}-1} = \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q} \cancel{-\frac{1}{q}} \cancel{+\frac{1}{q}} - 1}$$

Also: $\frac{d}{dx} x^r = r x^{r-1}$ für $r \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$

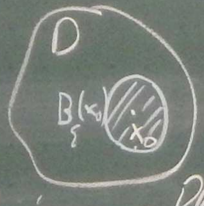
(Für negative r wende Quotientenregel an)

6.2 Höhere Ableitung

6.7 Def: Sei (M,d) metr. Raum, $D \subseteq M$

1) $x_0 \in D$ heißt <u>inneren Pkt von D</u>, falls

$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$

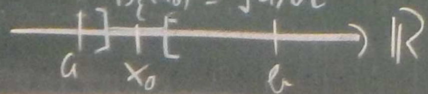


Falls $M = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}, \mathbb{C}^n$: Jeder innere Pkt von D ist auch Häufungspkt.

2) D heißt <u>offen</u>, falls jedes Element von D ein innerer Pkt von D ist.

6.8 Bsp: 1) $]a,b[\subseteq \mathbb{R}$ ist offen:

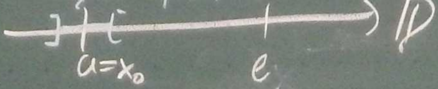
$B_\varepsilon(x_0) \subseteq]a,b[$



z.B. $\varepsilon := \frac{1}{2}\min\{b-x_0, x_0-a\}$

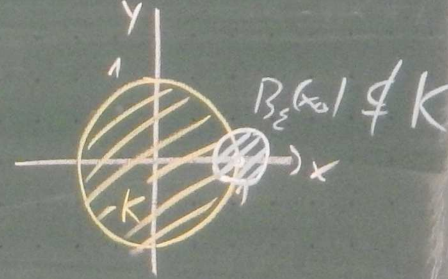
2) $[a,b[$ ist nicht offen, denn a ist kein innerer Pkt

$B_\varepsilon(x_0) \not\subseteq [a,b[$



3) $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist nicht offen

z.B. ist $(1,0) \in K$ kein innerer Pkt.



4) $B_1(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ ist offen

6.9 Def: Sei $f: \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$ und $k \in \mathbb{N}$, D offen, $x_0 \in D$.

1) f heißt in x_0 <u>k-Mal differenzierbar</u>, falls f in einem Intervall $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subseteq D$ $(k-1)$-Mal diffbar ist und die $(k-1)$-te Ableitung von f in x_0 diffbar ist. Schreibe

$$f^{(k)}(x_0) := \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) := \frac{d f^{(k-1)}}{dx}(x_0)$$

$$f^{(2)}(x_0) = \frac{d}{dx} f'(x_0) = f''(x_0), \quad f^{(3)}(x_0) = \frac{d f''}{dx}(x_0) = f'''(x_0)$$

2) f heißt k-Mal diffbar in D, falls f in jedem $x_0 \in D$ k-Mal diffbar ist. $f^{(k)}: D \to \mathbb{K}: x \mapsto f^{(k)}(x)$ heißt k-te Ableitung von f; f selber heißt manchmal 0-te Ableitung.

3) f heißt k-Mal stetig diffbar in D, falls $f^{(k)}$ stetig auf D ist. Die Menge aller in D k-Mal stetig diffbaren Fkten bildet einen Vektorraum, bezeichnet mit $C^k(D \to \mathbb{K})$.
$C^\infty(D \to \mathbb{K})$ bezeichnet den Vektorraum aller in D beliebig oft diffbaren Fkten.

Bsp: 1) $f(x) = 4x^3 + 3x - 1$ für $x \in D = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 3$, $f''(x) = 24x$, $f'''(x) = 24$

$f^{(n)}(x) = 0$ für $n \geq 4$, $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \in C^\infty(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$

2) $f(x) = \sin(x)$ für $x \in D = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$ ...

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sin(x) & \text{für } n \in \mathbb{N}_0, \text{ gerade} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos(x) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

3) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ offen

$f'(x) = -x^{-2}$, $f''(x) = 2x^{-3}$, ... $f^{(n)} = (-1)^n n! \, x^{-(n+1)}$

6.10 Leibnizregel:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \, g^{(n-k)}(x_0)$$

6.3 Ableitung von Potenzreihen

6.12 Satz: Sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ für $|z-z_0|<R$, wobei $R>0$ vorausgesetzt sei. Dann hat die Potenzreihe $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z-z_0)^{k-1}$ denselben Konvergenzradius R, und es gilt

$$g(z) = f'(z) \text{ für } |z-z_0|<R$$

Eine Potenzreihe kann immer gliedweise differenziert werden.

Plausibilität: Konvergenzradius von g:

$$\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k a_k|}} = \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}}_{=1} \cdot \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = R$$

6.13 Folg: Jede Potenzreihe mit pos. Konvergenzradius ist beliebig oft diffbar.

Eine Fkt, die als Potenzreihe darstellbar ist, heißt analytische Fkt.

6.14 Beispiele: 1) $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ für $|z|<1$ (geomet. Reihe)

$$f(z) = (1-z)^{-1} \Rightarrow f'(z) = -1(1-z)^{-2} \cdot (-1) = (1-z)^{-2}$$

$$f''(z) = -2(1-z)^{-3}(-1) = 2(1-z)^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = \left(\sum z^k\right)'$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} = \left(\sum k z^{k-1}\right)'$$

2) $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$, $R = \infty$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz} e^z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{\cancel{k!}\,(k-1)!} \overset{l:=k-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{l!} = e^z$$

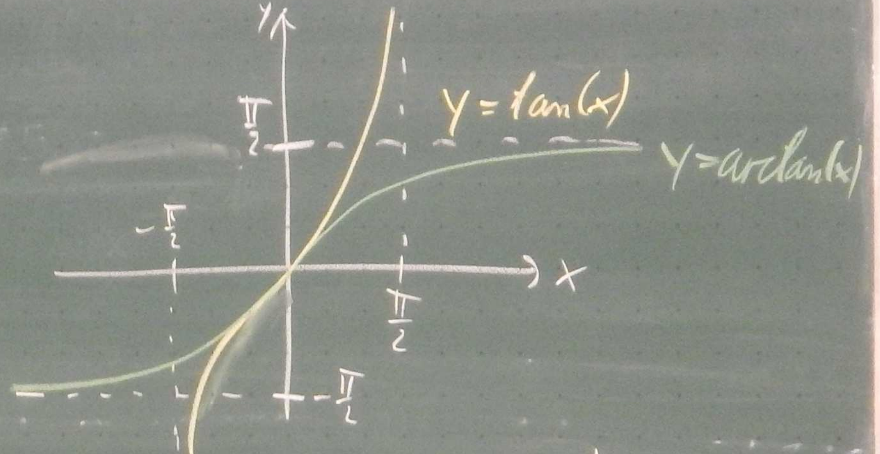
3) $\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dz}\cos(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\cancel{(2k)!}\,(2k-1)!} \cancel{2k}\, z^{2k-1} \underset{k=l+1}{\overset{l=k-1}{=}} -\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\cancel{l+1}}}{(2l+1)!} x^{2l+1}$$

$$= -\sin(z)$$

4) Genauso als Üb: $\frac{d}{dz}\sin(z) = \cos(z)$

5) $\tan: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\arctan(y) = \frac{1}{1+\tan^2(x)}\bigg|_{x=\arctan(y)} = \frac{1}{1+y^2}$$