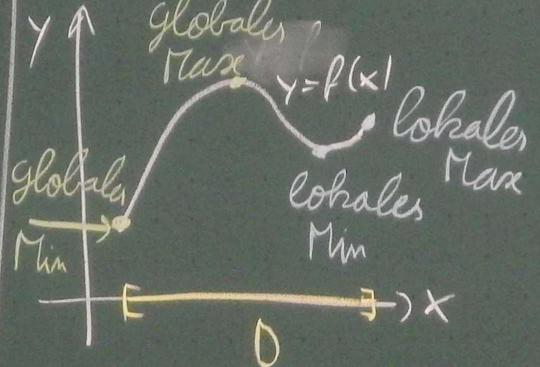
6.4 Extrema

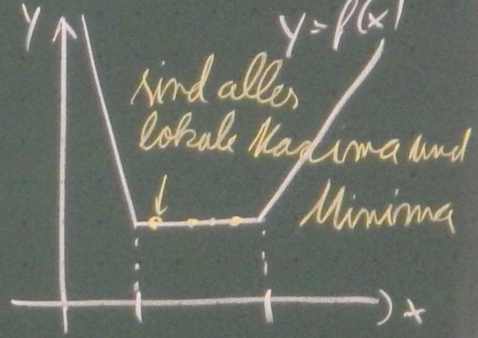
6.15 Def: Sei (M,d) metr. Raum und $f: M \supseteq D \to \mathbb{R}$. f hat in $x_0 \in D$ ein *lokales Maximum* (Minimum), falls

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in D: d(x,x_0) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \le f(x_0)$$
$$(f(x) \ge f(x_0))$$

Ein lokales Max/Min heißt auch *lokales Extremum*. Falls $f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$ heißt das lokale Extremum *strikt* oder *isoliert*.

Falls $\forall x \in D: f(x) \le f(x_0)$ $\quad (f(x) \ge f(x_0))$, so hat f in x_0 ein *globales Max.* (Min).





6.16 Notwendiges Krit. für Extrema: Sei $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in D$. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so folgt $f'(x_0) = 0$. Ist f diffbar in x_0 und $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 *stationärer* oder *kritischer* Punkt von f.

Beweis: $f'(x_0) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\gtrless 0}} \dfrac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{\substack{\geq 0\\ <0}}}$ $\Rightarrow f'(x_0)\geq 0$ $\wedge\ f'(x_0)\leq 0$ $\square$

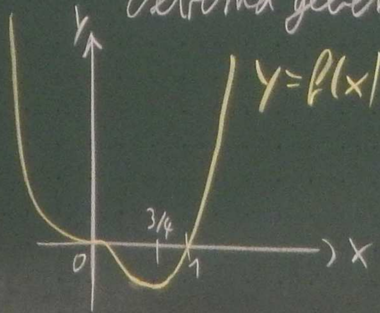
falls lokales Max.

6.17 Bsp. 1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto x^4-x^3 = x^3(x-1)$

Kritische Pkte: $f'(x)=4x^3-3x^2 = x^2(4x-3) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=\frac{3}{4}$

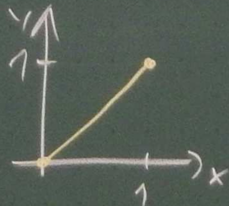
6.16 $\Rightarrow$ Es kann keine weiteren lokalen Extrema geben.



Bei $x_0=0$ kein lok. Extr.

" $x_0=\frac{3}{4}$: lokales und globales Min.

2) $f:[0,1]\to\mathbb{R}: x\mapsto x$



In $x_0=1$: globales Max (⇒ lokales Max)

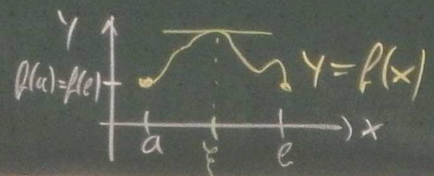
In $x_0=0$: globales Min

Aber keine krit. Pkte: $f'(x)=1$ für $0<x<1$

6.5 Mittelwertsätze und Anwendungen

6.18 Satz von Rolle: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ diffbar. Dann:

$f(a)=f(b) \Rightarrow \exists\, \xi\in\,]a,b[\,: f'(\xi)=0$



Beweis: Fall 1: $f = \text{konst.} \Rightarrow \forall \xi \in \,]a,b[\,: f'(\xi) = 0$

Fall 2: $f \neq \text{konst.}$:

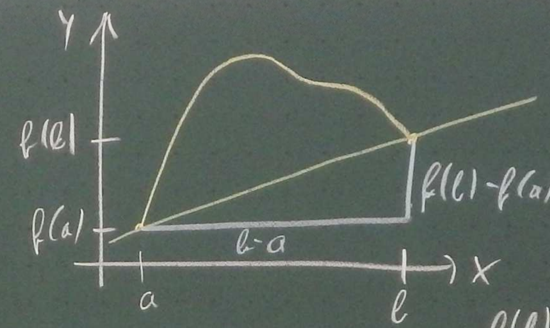
S.10 $\Rightarrow$ f nimmt auf $[a,b]$ das Max. und Min. an.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Falls } f(a) = \text{Max} \\ f \neq \text{konst.} \wedge f(b) = \text{Max} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_0 \in \,]a,b[\,: f(x_0) = \text{Min} \overset{6.16}{\Rightarrow} f'(x_0) = 0$$

$$\text{Falls } f(a) \neq \text{Max} \overset{f(b)=f(a)}{\Rightarrow} \exists x_0 \in \,]a,b[\,: f(x_0) = \text{Max} \Rightarrow f'(x_0) = 0 \qquad \square$$

6.19 Mittelwertsatz der Diffrechnung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und difflbar auf $]a,b[$. Dann

$$\exists \xi \in \,]a,b[\,: f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Sekante:
$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Beweis: $F(x) := f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

$\Rightarrow \begin{cases} F : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig und difflbar auf }]a,b[\\ F(a) = f(a), \quad F(b) = f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}\cancel{(b-a)} = f(a) \end{cases}$

$$6.18 \Rightarrow \exists \xi : 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1 \qquad \square$$

Beispiel: Beweise, dass $\sin x < x$ für $x \in \,]0, 2\pi[$ gilt.

Setze $f(x) := x - \sin x$. Zeige $f(x) > 0$ für $0 < x < 2\pi$.

$$6.19 \text{ in } [0,x] \Rightarrow \exists \xi \in \,]0,x[\,: f'(\xi) = \frac{f(x) - \overbrace{\cancel{f(0)}}^{=0}}{x - \cancel{0}}$$

$$\Rightarrow f(x) = f'(\xi) \cdot x = \underbrace{(1 - \cos \xi)}_{>0} \cdot \underbrace{x}_{>0} > 0$$

6.20 Verallgemeinerter Mittelwertsatz:

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf $]a,b[$.

Dann:

$$\left(\forall x \in]a,b[: g'(x) \neq 0\right) \Rightarrow \exists \xi \in]a,b[: \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

6.21 Nullableitung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

und diffbar auf $]a,b[$. Dann:

$$\left(\forall x \in]a,b[: f'(x) = 0\right) \Rightarrow f = \text{konst. auf } [a,b]$$

Beweis: Sei $x \in]a,b]$. Zeige $f(x) = f(a)$

6.19 in $[a,x] \Rightarrow \exists \xi \in]a,x[: \underbrace{f'(\xi)}_{=0} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$\Rightarrow f(x) = f(a)$ $\square$

6.22 Monotonie: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und

diffbar auf $]a,b[$.

1) Falls $\forall x \in]a,b[: f'(x) \geq 0 \,/\, f'(x) > 0 \,/\, f'(x) \leq 0 \,/\, f'(x) < 0$

dann ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend / streng mon. wachsend / mon. fallend / streng mon. fallend.

2) Ist f auf $[a,b]$ mon. wachsend / fallend, so gilt $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) für $x \in]a,b[$.

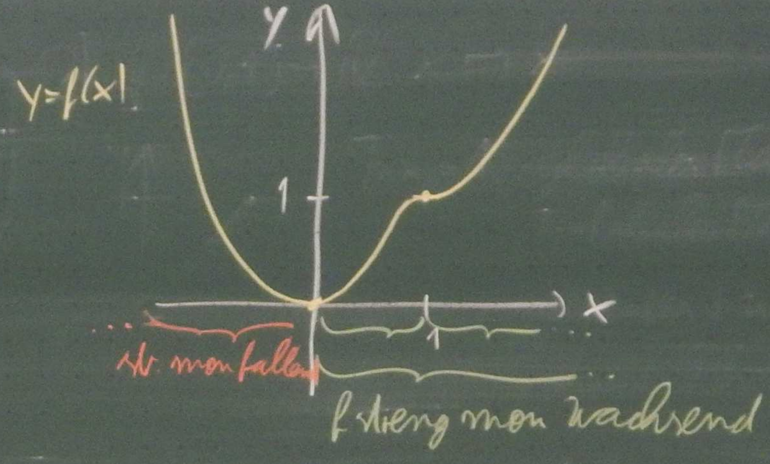
Beweis: 1) Sei $x_1 < x_2$. Zeige $f(x_1) \leq f(x_2)$.

6.19 in $[x_1, x_2] \Rightarrow \exists \xi \in]x_1, x_2[: \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}}$

$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

2) $f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$$= \lim_{x \downarrow x_0} \frac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{\geq 0}} \geq 0 \qquad \square$$



<u>Beispiel</u>: $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

$\Rightarrow f'(x) = 12(x^3 - 2x^2 + x) = 12x(x-1)^2$

Kritische Stellen: $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

$f(0) = 0,\ f(1) = 1$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} < 0 & \text{für } x < 0 \Rightarrow \text{streng mon fallend} \\ = 0 & \text{für } x = 0 \\ > 0 & \text{für } 0 < x < 1 \Rightarrow \text{str. mon. wachsend} \\ = 0 & \text{für } x = 1 \\ > 0 & \text{für } x > 1 \Rightarrow \text{str. mon wachsend} \end{cases}$$

6.23 Lokale Extrema: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diffbar auf $]a,b[$ und $x_0 \in]a,b[$, $f'(x_0) = 0$.

1) Gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass

$f'(x) \geq 0$ für $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ und

$f'(x) \leq 0$ für $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$,

dann hat f in x_0 ein (striktes) lokales Maximum:

$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0[\cup]x_0, x_0 + \varepsilon[: f(x) < f(x_0)$

Entsprechend für Min.

2) Ist f in x_0 zwei Mal diffbar und $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (bzw. $f''(x_0) > 0$), so besitzt f in x_0 ein lokales striktes Max (bzw. Min)

3) Ist f in x_0 zwei Mal diffbar, und besitzt f in x_0 ein lokales Max (Min), so folgen:

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \leq 0$ ($f''(x_0) \geq 0$).

Beweis: 1) 6.22 $\Rightarrow$ f ist auf $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng mon. wachs.

" " " $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ " " fallend

f stetig $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein striktes lok. Maximum.

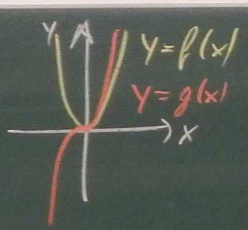
2) $f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \overbrace{f'(x_0)}^{=0}}{x - x_0}$ < 0 nach Voraus.

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$ für $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ für $x_0 - \varepsilon < x < x_0$

$f'(x) < 0$ " $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$

6.24 Achtung: $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) = 0$ bedeutet gar nichts bezügl. Extremum: Betrachte $f(x) = x^4$, $g(x) = x^5$ bei $x_0 = 0$.



6.25 Regeln von de l'Hospital Seien f, g ~~$[a,b] \to \mathbb{R}$~~ ~~stetig und~~ diffbar in $]a,b[$ und $g(x), g'(x) \neq 0$ auf $]a,b[$ und $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\downarrow a} g(x) = 0$. Dann:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \Rightarrow \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$

Beweis: Definiere $f(a) := 0$, $g(a) := 0$

$\Rightarrow f : [a,b[\to \mathbb{R}$ stetig, $g : [a,b[\to \mathbb{R}$ stetig

$$\left.\begin{array}{l} 6.20 \text{ in } [a,x] \\ \text{für } a<x<b \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, \xi_x \in\,]a,x[: \underbrace{\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}}_{\to c \text{ für } x \downarrow a} = \frac{f(x) - \overset{=0}{\cancel{f(a)}}}{g(x) - \underset{=0}{\cancel{g(a)}}}$$

6.26 Beispiele

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

2) $$\lim_{x \to \infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \overset{e^{(\cdot)} \text{ stetig}}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln(x)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

3) $$\lim_{x \downarrow 0} x \ln(x) = \lim_{x\downarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}$$
$$= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\downarrow 0}\left(-\frac{x^2}{x}\right) = 0$$