

Regeln von de l'Hospital: Seien

- $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar,
- $g(x), g'(x) \neq 0$ auf $]a, b[$,
- $\lim_{x \downarrow a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \downarrow a} g(x) = 0. \quad (V)$

Dann gilt:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c. \quad (\neq)$$

6.26 Varianten: 1) Typ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

Falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$,
dann gilt auch (*) am Stellen von (N)

2) Gilt auch für $x \uparrow b$ oder $x \rightarrow \infty$
oder $x \rightarrow -\infty$

3) Typ $[0 \cdot \infty]$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \text{Typ } \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{Typ } \left[\frac{0}{0}\right]$$

4) Typ $[1^\infty]$: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, $f(x) \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} e^{\underbrace{g(x) \ln(f(x))}_{\text{Typ } [\infty \cdot 0]}}$$

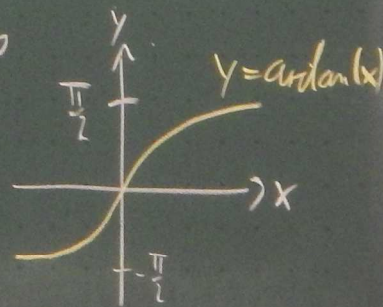
falls Grenzwert
= $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln(f(x))$
im Exponenten exist

5) Alles gilt auch bei bestimmter Divergenz: (*) kann
erweitert werden durch

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \infty \\ -\infty \end{cases}$$

Beispiel $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$$



$$2) \text{ Sei } \alpha > 0 \text{ fest: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^2} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\alpha x}}{2x} \stackrel{[\frac{\infty}{\infty}]}{=} \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2 e^{\alpha x}}{2} = \infty$$

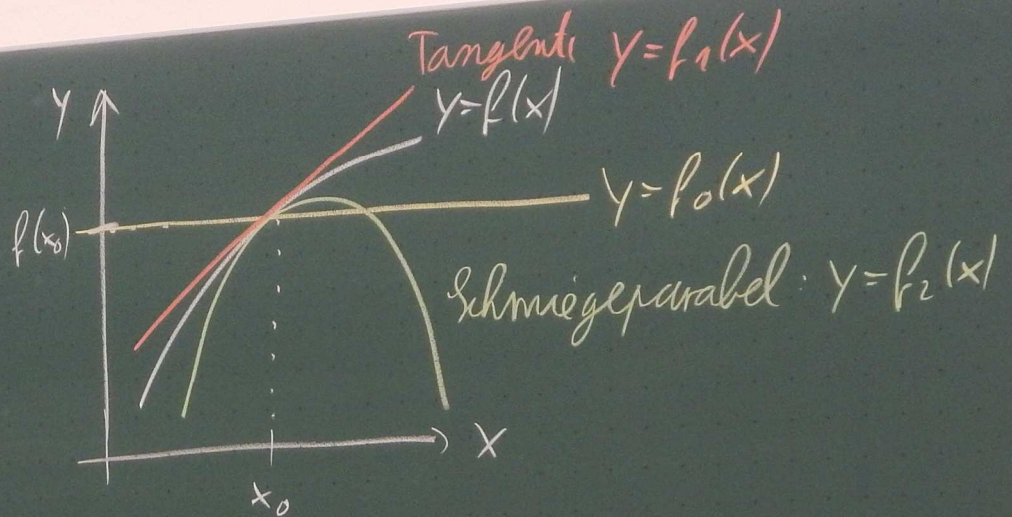
Exponentialfkt. wächst als jede Potenzfkt

für $x \rightarrow \infty$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{m}x}}{x} \right)^m = \infty$$

6.6 Der Satz von Taylor

Die Idee: Approximiere Fktionen durch Polynome.



0-te Approximation: $f_0(x) = f(x_0)$

1-te " $f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

2-te " $f_2(x) = f_0(x) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$

6.28 Def. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig diffbar
 und $x_0 \in [a, b]$. Es gibt genau ein Polynom T_n vom
 Grad n , so dass

$f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0)$ für $k=0, 1, \dots, n$
gilt, nämlich

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

T_n heißt n -tes Taylorpolynom für f ,

$$R_n(x) := f(x) - T_n(x)$$

heißt n -tes Restglied.

Beisp. $f(x) = \ln(x)$, $x_0 = e$: $T_0(x) = \ln(e) = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \stackrel{x=x_0=e}{=} \frac{1}{e} \Rightarrow T_1(x) = 1 + \frac{1}{e}(x-e)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \stackrel{x=x_0}{=} -\frac{1}{e^2} \Rightarrow T_2(x) = 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2$$

Frage: Wie groß ist $|R_2(x)| = |\ln(x) - T_2(x)|$?

6.30 Satz (Taylor, Lagrange): Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$
 n -mal stetig diffbar, $x_0 \in]a, b[$, $x \in]x_0, b[$
Dann gibt es ein $\xi \in]x_0, x[$, so dass

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

Genauso für $x \in]a, x_0[$, dann $\xi \in]x, x_0[$.

6.31 Bem. 1) Für $n=0$ ist das der Mittelwertsatz
der Diff. rechnung.

2) T_n approximiert f an der Stelle x_0 bis zur n -ten
Ableitung. Erst durch Abschätzung des Restglieds
erkennt man, wie gut die Approximation in einer
Umgebung von x_0 ist.

Bsp 1) $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{x^k} \quad \text{für } k \geq 1$$

$$\Rightarrow |R_m(x)| = \left| (-1)^{m+2} \frac{m!}{(m+1)!} (x-e)^{m+1} \right|$$

Für $x > e$ gilt $\exists \xi \in]e, x[\Rightarrow \xi > e \Rightarrow \frac{1}{\xi} < \frac{1}{e}$

$$\Rightarrow |R_m(x)| \leq \frac{1}{m+1} \frac{1}{e^{m+1}} (x-e)^{m+1}$$

Kann man bei festem x m genügend groß gewählt werden, so dass $|R_m(x)|$ klein genug ist.

Die Approximation lautet dann

$$\ln(x) = 1 + \sum_{h=1}^m \frac{(-1)^{h+1} (h-1)!}{e^h h!} (x-e)^h + R_m(x)$$

$$= 1 + \sum_{h=1}^m \frac{(-1)^h}{h \cdot e^h} (x-e)^h$$

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x : f^{(h)}(x) = e^x$

Für $x=0$: $f^{(h)}(0) = e^0 = 1$

$$\Rightarrow T_m(x) = \sum_{h=0}^m \frac{1}{h!} (x-0)^h$$

$$R_m(x) = \frac{e^\xi}{(m+1)!} (x-0)^{m+1}$$

Was passiert für $m \rightarrow \infty$?

$$\xi \in]0, x[\text{ oder } \xi \in]x, 0[\Rightarrow |\xi| \leq |x|$$

$$\Rightarrow |R_m(x)| \leq \frac{e^{|x|}}{(m+1)!} |x|^{m+1} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow e^x = \lim_{m \rightarrow \infty} T_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (\text{Schon bekannt})$$

3) Die Binomialreihe: $f:]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto (1+x)^r$
mit festem $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$. Für $x_0 = 0$:

$$f(x_0) = 1$$

$$f'(x) = r(1+x)^{r-1} \stackrel{x=0}{=} r$$

$$f''(x) = r(r-1)(1+x)^{r-2} \stackrel{x=0}{=} r(r-1)$$

$$f^{(k)}(0) = r(r-1) \dots (r-k+1)$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{r(r-1) \dots (r-k+1)}{k(k-1) \dots 1} = \binom{r}{k}$$

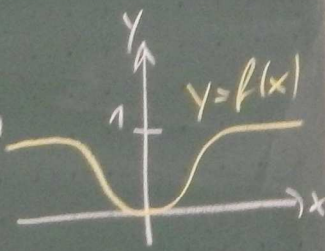
$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}: R_m(x) = f(x)$$

Zeige: $|R_m(x)| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ falls $|x| < 1$

$$\Rightarrow (1+x)^r = \sum_{k=0}^m \binom{r}{k} x^k$$

$$\text{z.B. } \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})}{2!} x^2 + \dots$$

$$4) f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



$$f'(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \quad \left[\frac{0}{0} \right] \text{ und l'Hospital}$$

bringt nichts

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{1/x^2} \cdot \left(\frac{-2}{x^3} \right)} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\frac{x^3}{x^2}}{2e^{1/x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Man kann zeigen: $\forall m \in \mathbb{N}: f^{(m)}(0) = 0 \Rightarrow T_m(x) = 0$

6.7 Extrema: Hinreichende Bedingungen

6.33 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f \in C^m(D \rightarrow \mathbb{R})$,
 $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in D$ und

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \text{ für } k=1, 2, \dots, m-1 \text{ und} \\ f^{(m)}(x_0) \neq 0$$

1) Ist m ungerade, so hat f in x_0 einen
Sattelpunkt, d.h. Wendepkt. mit
waagrechter Tangente.

2) Ist m gerade, so gilt:

a) $f^{(m)}(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein striktes
lokales Minimum

b) $f^{(m)}(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein striktes lokales
Maximum.

Beweis: Satz von Taylor:

$$f(x) = T_{m-1}(x) + R_m(x)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}}_{= f(x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}}_{> 0 \text{ für } \xi \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[} (x-x_0)^m$$

Fall 2a) $= f(x_0)$ $f^{(m)}(\xi) > 0$ für $\xi \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$

$$\Rightarrow f(x) > f(x_0) \text{ für } x \in]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$$

also liegt in x_0 ein striktes lokales Minimum vor.

Fall 1: $(x-x_0)^m$ hat Vorzeichenwechsel $\Rightarrow$ kein Extremum.

6.34 Beispiel $f(x) = (x-1)^6, x_0 = 1$

$$f'(x) = 6(x-1)^5 \stackrel{x=0}{=} 0$$

$$f''(x) = 30(x-1)^4 = 0$$

$$f'''(x) = 120(x-1)^3 = 0$$

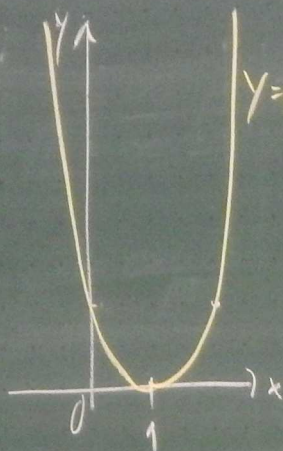
$$f^{(4)}(x) = 360(x-1)^2 = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 720(x-1) = 0$$

$$f^{(6)}(x) = 720 > 0$$

$$\Rightarrow m=6, f^{(6)}(x_0) > 0$$

$\Rightarrow$ Minimum in $x_0 = 1$
strenger lokaler



2) $g(x) = e^x - \sum_{h=0}^4 \frac{x^h}{h!}$

$$\Rightarrow g'(0) = g''(0) = \dots = g^{(4)}(0) = 0 \quad \left. \vphantom{g^{(4)}(0)} \right\} m=5$$

$$g^{(5)}(0) = e^0 = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \text{Sattelpunkt in } x_0 = 0$$

3) $f(x) = (x-1)^5, x_0 = 1$

$$\Rightarrow m=5, f^{(5)}(1) = 5! \neq 0$$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt in $x_0 = 1$:

