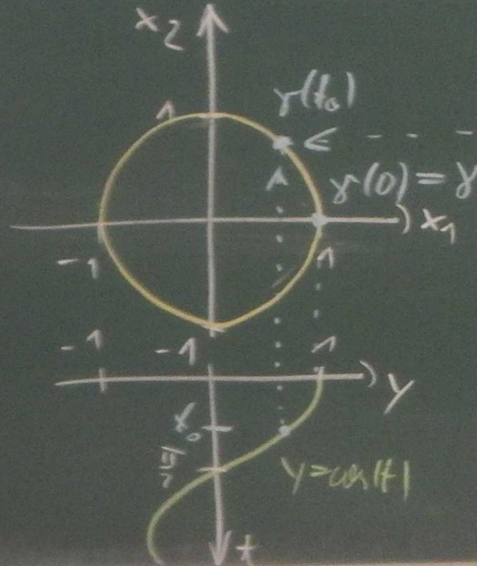
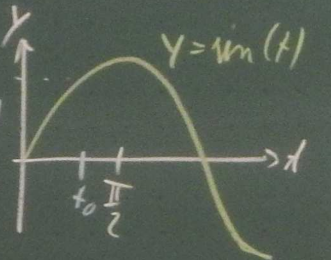
6.8 Ableitung II

Beispiel: $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \gamma(t)$

$|\gamma(t)| = \sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)} = 1$

$\Rightarrow$ Alle Punkte $\gamma(t)$ auf Einheitskreis





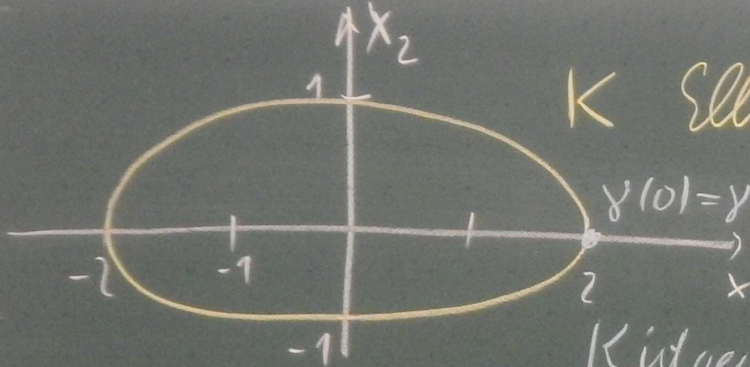
$K := \{\gamma(t) : t \in [0, 2\pi]\}$ ist die Menge aller Punkte auf dem Einheitskreis

6.35 Def: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Die Menge

$$K := \{\gamma(t) : a \le t \le b\}$$

heißt Kurve im $\mathbb{R}^n$, $(\gamma, [a,b])$ heißt Parameterdarstellung von K. Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt K geschlossen. Ist $\gamma|_{[a,b[}$ injektiv, so heißt K Jordan-Kurve.

6.36 Beisp: 1) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$



K Ellipse

$\gamma(0) = \gamma(2\pi)$

K ist geschlossen

K ist Jordan-Kurve, da $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ für $0 \leq t < t' < 2\pi$

2) $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ -\sin(2t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ K ist dieselbe Kurve wie in 1)

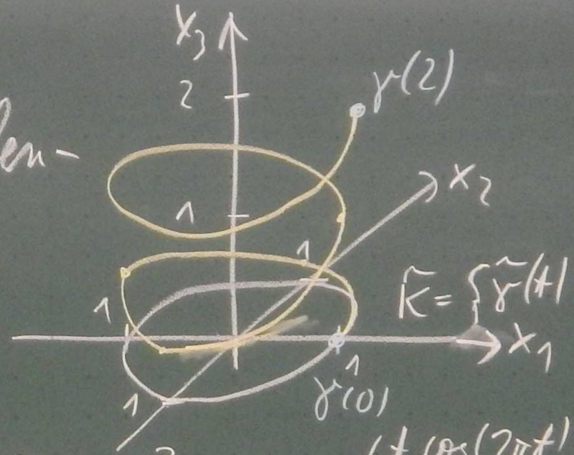
3) $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}$

Vorüberlegung:

$\tilde{\gamma} : [0,2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ 0 \end{pmatrix}$

durchläuft Einheitskreis zwei Mal

K = Schraubenlinie

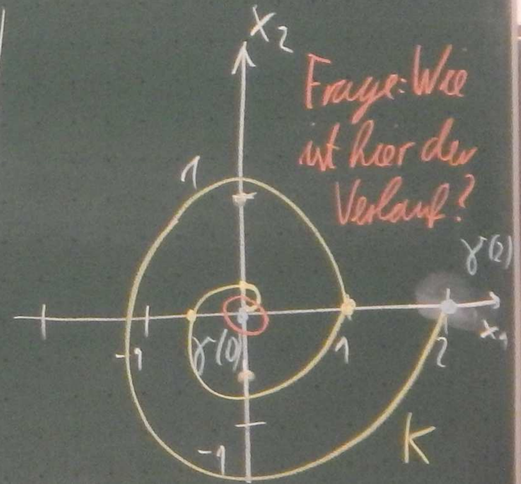


$\tilde{K} = \{\tilde{\gamma}(t) : 0 \leq t \leq 2\}$

4) $\gamma_A : [0,2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos(2\pi t) \\ t\sin(2\pi t) \end{pmatrix}$

t	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2
$\gamma_A(t)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\gamma_A(t)| = \sqrt{t^2} \overset{t \geq 0}{=} t$



Frage: Wie ist hier der Verlauf?

6.33 Def u. Satz: Sei $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}^n$ und $x_0 \in D$ Häufungspkt. von D. Dann heißt f **differenzierbar** in x_0, falls

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{1}{x-x_0} \cdot \underbrace{\left(f(x) - f(x_0)\right)}_{\text{Vektor}}$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn jede Koordinate f_j von f in x_0 diffbar ist. Es gilt dann

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_n'(x_0) \end{pmatrix}$$

Beweis:
$$\frac{1}{x-x_0} \cdot \big(\underbrace{f(x)}_{\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}} - f(x_0)\big) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-x_0}\left(f_1(x) - f_1(x_0)\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{x-x_0}\left(f_n(x) - f_n(x_0)\right) \end{pmatrix} \xrightarrow{x \to x_0} \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_n'(x_0) \end{pmatrix}$$
$\square$

6.38 Beispiele: 1)
$$\gamma_A'(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) - 2\pi t \sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) + 2\pi t \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$$

$$\gamma_A'(0) = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^n$: $A^2 \cdot v = A \cdot (A \cdot v)$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n: t \mapsto e^{At} v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{(tA)^k \cdot v}_{= t^k \cdot A^k \cdot v}$$

$$\Rightarrow g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{k!} \underbrace{A^k \cdot v}_{= \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}}\Big) t^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{1,k}}{k!} t^k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n,k}}{k!} t^k \end{pmatrix}$$

Ableitung $\Rightarrow$ Potenzreihe
$$g'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\cancel{k!}_{(k-1)!}} (A^k \cdot v) \cancel{k} t^{k-1}$$

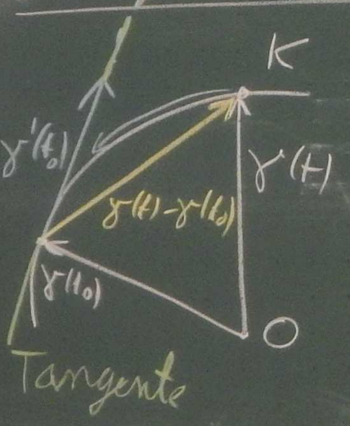
$$\overset{l = k-1}{=} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (A^{l+1} \cdot v) t^l = A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (A^l \cdot v) t^l = A \cdot g(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{At}\cdot v\right) = A\cdot\left(e^{At}\cdot v\right)$$

3) Im Prinzip genauso:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = A\cdot e^{At}$$

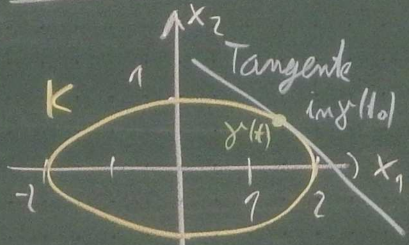
6.39 Geometrische Bedeutung



Ist γ in $t_0 \in [a,b]$ differenzierbar mit $\gamma'(t_0) \neq 0$, dann ist $\gamma'(t_0)$ ein Tangentenvektor an $K = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ im Punkt $\gamma(t_0)$.

Die Länge $\|\gamma'(t_0)\|$ gibt an, wie "schnell" K durchlaufen wird.

6.40 Beispiele 1) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

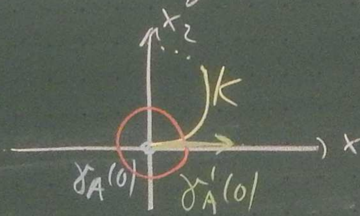


Tangente: T =

$$\{x = \underbrace{\gamma(t_0)}_{\text{Stützvektor}} + \lambda\cdot\underbrace{\gamma'(t_0)}_{\text{Richtungsvektor}} : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2\cos(t_0) - \lambda\, 2\sin(t) \\ \sin(t_0) + \lambda\cos(t) \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

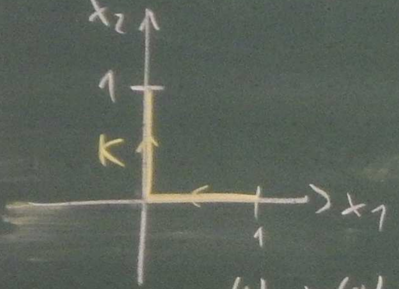
2) Archimedische Spirale: $\gamma_A'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor der Tangente in $\gamma_A(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:



K verläuft in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ parallel zur x_1-Achse.

6.4.1 <u>Achtung</u>: Bei $\gamma'(t_0)=0$ kann K Ecken haben.

z.B.: $\gamma:[-1,1]\to\mathbb{R}^2: t\mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für } -1\le t<0 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} & \text{für } 0\le t\le 1 \end{cases}$



γ ist differenzierbar in $t_0=0$ mit $\gamma'(0)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{\gamma_1(t)-\gamma_1(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2-0}{t} = 0$$

$\Rightarrow \gamma_1'(0)=0$, genauso $\gamma_2'(0)=0$

<u>6.4.2 Def</u>: Sei $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ stetig.

1) γ heißt <u>regulär</u>, falls γ diff'bar auf $[a,b]$ und $\gamma'(t)\neq 0$ für $a\le t\le b$.

2) γ heißt <u>singulär</u> in t_0, falls $\gamma'(t_0)=0$.

<u>6.4.3 Bem</u>: Reguläre Kurven besitzen keine Ecken, in jedem Punkt $\gamma(t)$ mit $a<t<b$ ist eine eindeutige Tangente definiert.

7. Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

7.1 Ableitung III

<u>7.1 Der Graph</u> von Funktionen mehrerer Variablen:

Ist $f:\mathbb{R}^2\supseteq D\to\mathbb{R}$ und D offen, so ist der Graph

$$G=\left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x_1,x_2)\end{pmatrix} : (x_1,x_2)\in D\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

eine (gekrümmte) Fläche im $\mathbb{R}^3$.

Allgemein: $f:\mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ und D offen. Dann ist

$$G=\left\{\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix} : x\in D\right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

eine "Hyperfläche" im $\mathbb{R}^{n+1}$.

7.2 Beispiele: 1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\mapsto 4+5x_1-2x_2$

$$G(f)=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ 4+5x_1-2x_2\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 4\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 5\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}} : (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

ist eine Ebene.

2) Allgemeiner: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}: x\mapsto a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_n$

$\Rightarrow$ Graph ist eine Hyperebene im $\mathbb{R}^n$

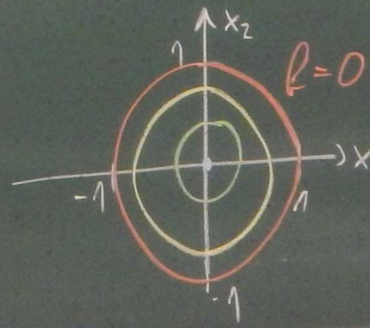
3) $f: D=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : x_1^2+x_2^2\le 1\right\}\to\mathbb{R}: \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\mapsto\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}$

$$G(f)=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \sqrt{1-x_1^2-x_2^2}\end{pmatrix} : \underbrace{x_1^2+x_2^2\le 1}_{D=\text{Kreisfläche im }\mathbb{R}^2}\right\}$$

Am Rand von D: $x_1^2+x_2^2=1 \Rightarrow f=\sqrt{1-1}=0$

Wo ist $f=\text{konst}=c\ge 0$

$\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}=c \Leftrightarrow 1-x_1^2-x_2^2=c^2 \Leftrightarrow 1-c^2=x_1^2+x_2^2$



$f=0$

$f=c$

$f=c'>c$

$f=1$

Weitere Methode zur Veranschaulichung:

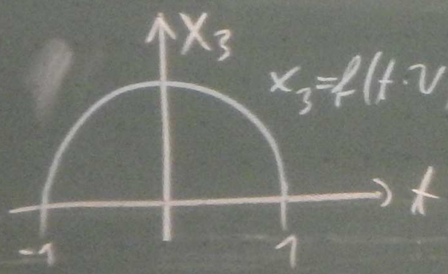
Betrachte das Verhalten von f längs einer Geraden: Sei $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

$$f(t \cdot v) = \sqrt{1-(t v_1)^2-(t v_2)^2}$$

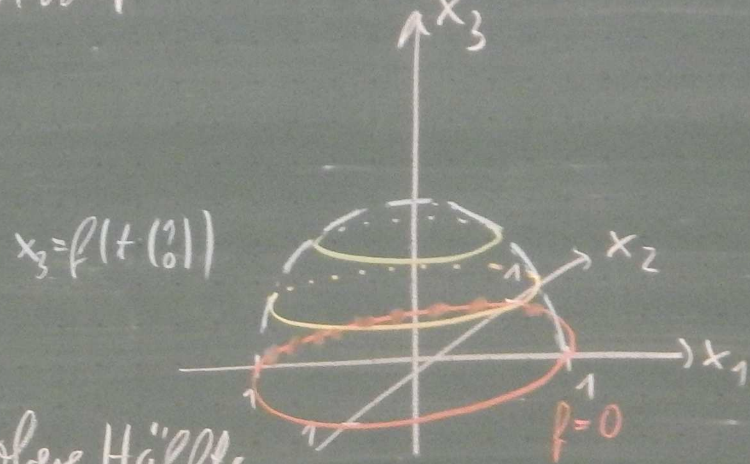
$$= \sqrt{1-t^2(v_1^2+v_2^2)}$$

$$= \sqrt{1-t^2\|v\|}$$

O.B.d.A: $\|v\| = 1$



Graph von f



G(f) ist obere Hälfte der Einheitskugel.