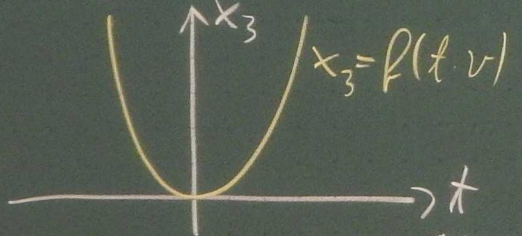
4) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \binom{x_1}{x_2} \mapsto x_1 \cdot x_2$

Verhalten längs Gerade $g: t \mapsto t \cdot v$

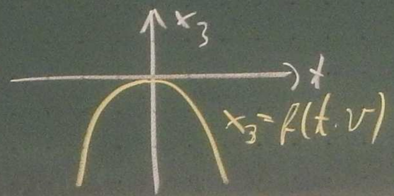
$v = \binom{v_1}{v_2}$ Richtungsvektor

$f(t \cdot v) = t \cdot v_1 \cdot t \cdot v_2 = t^2 v_1 v_2$

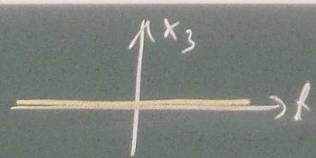
Fall $v_1, v_2 > 0$ oder $v_1, v_2 < 0$: $v_1 \cdot v_2 > 0$



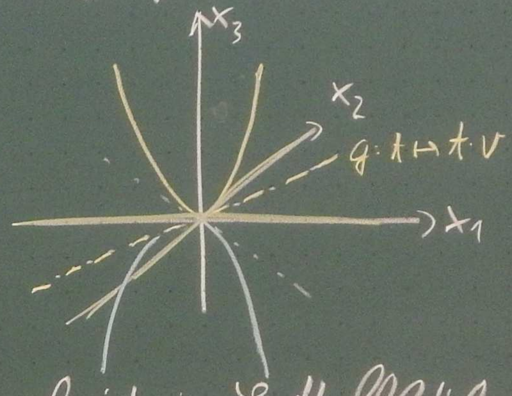
Fall $v_1 \cdot v_2 < 0$



Fall $v_1 \cdot v_2 = 0$



Skizze des Graphen



Der Graph ist eine Sattelfläche

7.3 Umformung der Ableitungsdef: Sei $f: \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspkt. von D.

Dann:

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \to 0 \text{ f. } x\to x_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-x_0}\Big(\underbrace{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}_{=:r(x)}\Big)\to 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+r(x)$$

und $\frac{1}{x-x_0}r(x)\to 0$.

7.4 Def: Sei $f:\mathbb{R}^n \supseteq D\to\mathbb{R}$, D offen und $x_0\in D$. Dann heißt f *differenzierbar* in x_0, falls eine $1\times n$ Matrix $A=(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$ existiert, so dass

$$f(x)=f(x_0)+A\cdot(x-x_0)+r(x)$$

mit $\frac{1}{\|x-x_0\|}r(x)\to 0$ für $x\to x_0$

oder äquivalent

$$\frac{1}{\|x-x_0\|}\big(f(x)-f(x_0)-A\cdot(x-x_0)\big)\to 0 \text{ für } x\to x_0$$

Die Matrix A heißt *Ableitung* von f in x_0, schreibe $f'(x_0):=A=(a_1\ a_2\ \dots\ a_n)$.

Der affine Raum

$$T:=\left\{\begin{pmatrix}x\\ x_{n+1}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n+1}: x\in\mathbb{R}^n \wedge x_{n+1}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\right\}$$

heißt *Tangentialebene* (falls $n=2$) bzw. Tangentialhyperebene an den Graphen von f.

7.5 Die Idee dahinter: Die Fkt $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die optimale lineare Approximation von f in x_0.

7.6 Beispiele: 1) $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2$

Behauptung: $f'\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 & 8y_2 \end{pmatrix}$

Beweis: $\left| \frac{1}{\|x-y\|} \Big(\underbrace{f(x) - f(y) - f'(y)(x-y)} \Big) \right| =$

$$= x_1^2 + 4x_2^2 - y_1^2 - 4y_2^2 - (2y_1 \quad 8y_2) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad - 2y_1x_1 + 2y_1^2 - 8y_2x_2 + 8y_2^2$$

$$= x_1^2 + y_1^2 - 2y_1x_1 + 4x_2^2 + 4y_2^2 - 8y_2x_2$$

$$= (x_1 - y_1)^2 + 4(x_2 - y_2)^2$$

$$= \frac{1}{\|x-y\|} \cdot \Big| \underbrace{(x_1 - y_1)^2}_{\le \|x-y\|^2} + 4 \underbrace{(x_2 - y_2)^2}_{\le \|x-y\|^2} \Big| \le \frac{5\|x-y\|^2}{\|x-y\|} \to 0 \text{ für } x \to y.$$

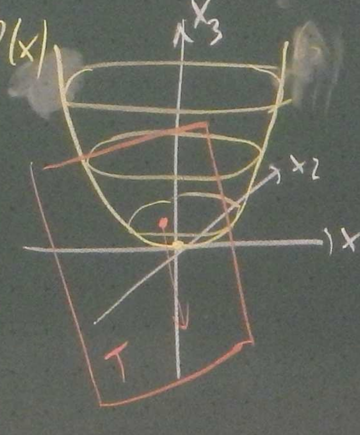
Tangentialebene im Pkt $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$: ($0 = y_1$, $-1 = y_2$, $4 = f(y_1, y_2)$)

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge \underbrace{x_3 = 4 + (2 \cdot 0 \quad 8 \cdot (-1)) \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 + 1 \end{pmatrix}}_{x_3 = 4 - 8(x_2 + 1) = -8x_2 - 4} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -8x_2 - 4 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$G: x_3 = f(x)$



T berührt den Graphen G in $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

7.7 Satz: Ist f diffbar in x_0, so ist f stetig in x_0.

Beweis: $f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\to 0 \text{ für } x \to x_0} + \underbrace{\frac{r(x)}{\|x-x_0\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|x-x_0\|}_{\to 0}$

$\to f(x_0)$ für $x \to x_0$ $\square$

7.8 Wichtige Idee: Betrachte $f(x_0+t\cdot v)$ mit festem Richtungsvektor v, also das Verhalten von f, wenn sich x entlang der Geraden $t \mapsto x_0 + t\cdot v$ verändert.

Geometrisch: Schneide den Graphen von f mit der Ebene, die durch die Gerade und den Vektor $\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ aufgespannt wird:

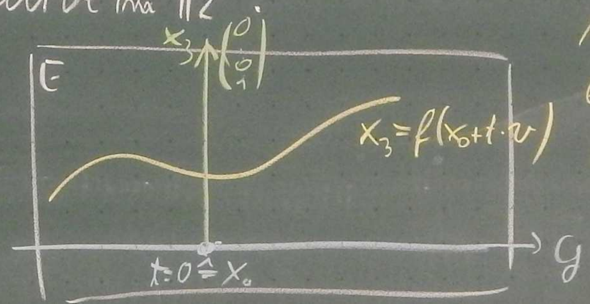
$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + t\cdot v \\ x_{n+1}\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R},\ x_{n+1} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow E \cap G = E \cap \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} : x \in D \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_0 + t\cdot v \\ f(x_0 + t\cdot v)\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

= Schnittkurve

In der Ebene E "sieht" man die Schnittkurve als Kurve im $\mathbb{R}^2$:



Man muss nur mehr eine Variable t betrachten

Noch spezieller: Wähle $v = e_1$ oder ... $v = e_n$

Betrachte also z.B. $\underbrace{t \mapsto f(x_0 + t\cdot e_1)}_{=: g_1}$. Falls diese Abbildung diffbar:

$$g_1'(0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h\cdot e_1) - f(x_0)}{h}$$

ist die Tangentensteigung der Schnitt-kurve im Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$.

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

7.9 Partielle Ableitungen: Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, D offen und f differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann existieren für $j = 1, \dots, n$ die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h\cdot e_j) - f(x_0)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) =: \partial_{x_j} f(x_0) =: \partial_j f(x_0)$$

Diese GWe heißen partielle Ableitungen von f in x_0.

Es gilt

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_2} f(x_0) & \dots & \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

Der Vektor

$$\nabla f(x_0) := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt Gradient von f in x_0

Zum Beweis: $0 = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\|x - x_0\|} \left(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot(x - x_0) \right)$

$x = x_0 + h\cdot e_j \Rightarrow$

$$0 = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{1}{|h|}}_{= \frac{\operatorname{sign}(h)}{h}} \left(f(x_0 + h e_j) - f(x_0) - \underbrace{f'(x_0)\cdot h e_j}_{= h\cdot a_j,\ A = f'(x_0)} \right)$$

$\|x - x_0\| = \|h e_j\| = |h| \cdot \|e_j\| = |h|$

$$= \lim_{h \to 0} \operatorname{sign}(h) \cdot \left(\frac{f(x_0 + h e_j) - f(x_0)}{h} - a_j \right)$$

$$\Rightarrow a_j = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h e_j) - f(x_0)}{h} = \partial_{x_j} f(x_0)$$

□

7.10 Bem: $f'(x_0)\cdot(x-x_0) = \langle \nabla f(x_0), (x-x_0)\rangle$

$f'(x_0) = \nabla f(x_0)^T$ (transponiert)

Beispiele: 1) $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1^2+4x_2^2$

$$\partial_{x_1} f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{f\begin{pmatrix}x_1+h\\x_2\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x_1+h)^2+4x_2^2-(x_1^2+4x_2^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x_1+h)^2-x_1^2}{h} = \frac{d\,x_1^2}{dx_1} = 2x_1$$

Berechne $\partial_{x_1} f$: Betrachte alle anderen Variablen als Konstanten und f nur als Fkt. von x_1, leite nach x_1 ab.

$$\Rightarrow \partial_{x_2} f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 8x_2$$

2) $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = x_1\cdot x_2 \Rightarrow \partial_{x_1} f = x_2,\ \partial_{x_2} f = x_1$

$$\Rightarrow f'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2 & x_1\end{pmatrix}$$

3) $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = e^{x_1x_2^2x_3^3} + x_1^3$

$$\partial_{x_1} f = e^{x_1x_2^2x_3^2}\cdot x_2^2x_3^3 + 3x_1^2$$

$$\partial_{x_2} f = x_1 2x_2x_3^3\, e^{x_1x_2^2x_3^3} + 0$$

$$\partial_{x_3} f = 3x_3^2x_2^2x_1\, e^{x_1x_2^2x_3^3} + 0$$

7.11 Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitung

Schneiden der Graph von f mit der Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix}x_0+t\cdot e_j\\x_{n+1}\end{pmatrix} : t, x_{n+1}\in\mathbb{R}\right\}$$

Die Schnittkurve kann in der Ebene E als Graph der Funktion $h_j : t \mapsto f(x_0 + t \cdot e_j)$ betrachtet werden. Dann ist $\partial_{x_j} f(x_0)$ die Tangentensteigung von h_j in $t = 0$.

7.12 Geometrische Bedeutung des Gradienten

Für einen festen Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ schneiden den Graphen von f mit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 + t \cdot v \\ x_{n+1} \end{pmatrix} : t, x_{n+1} \in \mathbb{R} \right\}$ Die Steigung der Schnittkurve in x_0 ergibt sich zu

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + t \cdot v)\Big|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + (0+h) v) - f(x_0)}{h}$$

$$\overset{\text{Def } f'(x_0)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(x_0)} + f'(x_0) \cdot h \cdot v + r(x_0 + h \cdot v) - \cancel{f(x_0)}}{h}$$

$$= f'(x_0) \cdot v = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

Die Steigung ist am größten, wenn $v \parallel f(x_0)$ gilt

Dann folgt

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + t \cdot v)\Big|_{t=0} = \|\nabla f(x_0)\|$$

Also: Der Gradient zeigt in die Richtung, in der f am stärksten wächst.