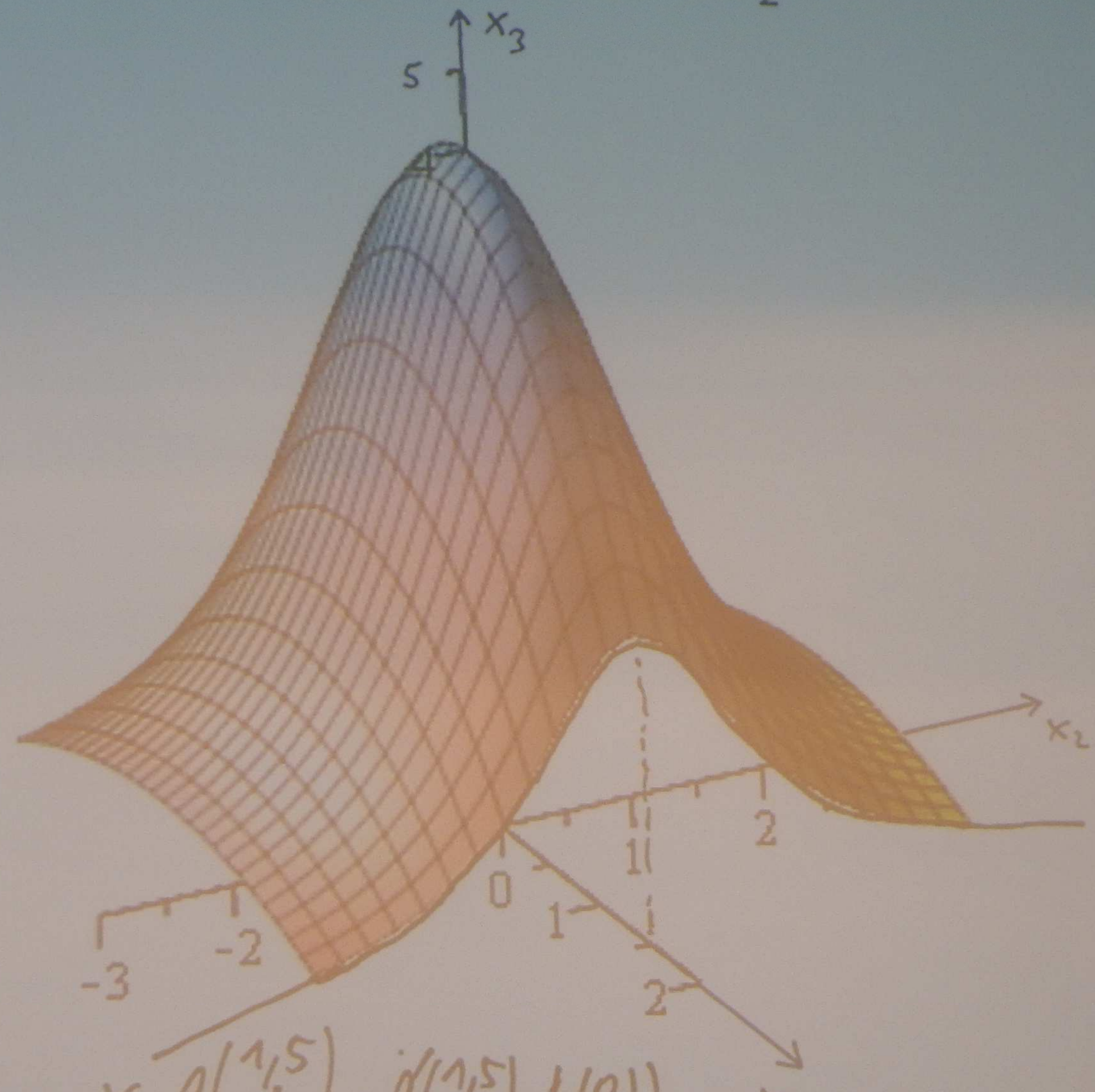
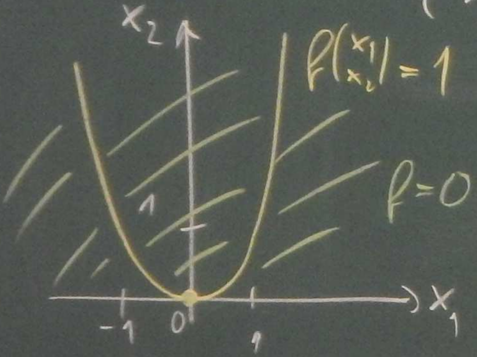
$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (4 - x_1^2)\frac{1}{1 + x_2^2}$$



$$x_3 = f\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ t \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

7.13 Achtung: Die Existenz aller partiellen Ableitungen in x_0 garantiert nicht die Diffbarkeit in x_0. Z.B

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x_1 \neq x_2^2 \vee \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ 1 & \text{falls } x_1 = x_2^2 \wedge \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \end{cases}$$



$$\partial_{x_1} f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f\begin{pmatrix}h\\0\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}^{=0}}{h} = 0$$

$$\partial_{x_2} f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f\begin{pmatrix}0\\h\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}^{=0}}{h} = 0$$

Es gilt sogar für jeden Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$\frac{d}{dt} f(0 + t\cdot v)\Big|_{t=0} = 0$$

Aber f ist nicht stetig in $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$:

$$\left.\begin{aligned} x_n &= \begin{pmatrix}1/n\\0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \wedge f\begin{pmatrix}1/n\\0\end{pmatrix} = 0 \to 0 \\ x_n' &= \begin{pmatrix}1/n\\1/n^2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \wedge f\begin{pmatrix}1/n\\1/n^2\end{pmatrix} = 1 \to 1 \end{aligned}\right\} \text{verschieden} \Rightarrow f \text{ nicht stetig}$$

$\overset{7.7 \text{ mit}}{\underset{\text{Kontrapos}}{\Longrightarrow}}$ f ist in $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ nicht diffbar.

7.14 Kriterium für Diffbarkeit: Sei $f: \mathbb{R}^m \supseteq D \to \mathbb{R}$ stetig, D offen und alle partiellen Ableitungen $\partial_j f$ existieren in D und sind stetig in $x_0 \in D$. Dann ist f in x_0 diffbar, und

$$f'(x_0) = (\partial_1 f(x_0) \; \dots \; \partial_m f(x_0))$$

ohne Beweis

Also:

Für Diffbarkeit in x_0 notwendig: f stetig in x_0

" " " " hinreichend:

f stetig in x_0, partielle Abl. exist. und stetig in x_0

Def: Falls $\partial_j f$ in D exist., können von $\partial_{x_j} f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ wieder partielle Ableitungen gebildet werden. Schreibe $\partial_{x_k}\partial_{x_j} f$ oder $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ oder falls $k=j$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ (partielle Ableitungen 2. Ordnung). Genauso partielle Ableitungen m-ter Ordnung.

Setze $C^m(D \to \mathbb{R}) := \{ f : D \to \mathbb{R}$: Alle partiellen Ableitungen von f bis zur m-ten Ordnung existieren und sind stetig auf D, f als nullte partielle Abl. muss auch stetig sein $\}$

Insbesondere: $f \in C^1(D \to \mathbb{R}) \overset{7.14}{\Longrightarrow} f$ ist in jedem $x_0 \in D$ diffbar.

7.2 Extrema

Beispiel: $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (4 - x_1^2)\frac{1}{1+x_2^2}$ auf $D = \mathbb{R}^2$

Klar ist: Lokales und globales Max. in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$

Untersuchung von f in $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$\mathbb{R}$: Alle partiellen
f bis zur m-ten Ord-
und sind stetig
ullte partielle Abl.
tig sein }
f ist in jedem $x_0 \in D$
diffbar.

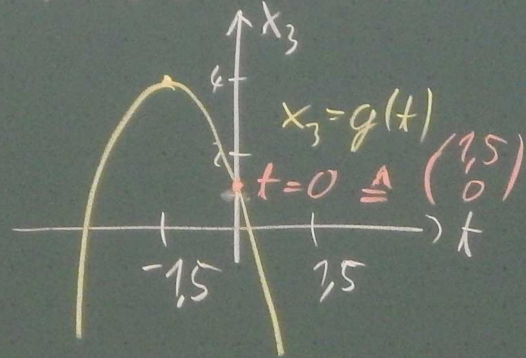
auf $D = \mathbb{R}^2$

ax in $\binom{0}{0}$, $f\binom{0}{0} = 4$

Verhalten von f längs $G_1 := \left\{x = \binom{1{,}5}{0} + t\binom{1}{0}\right\}$

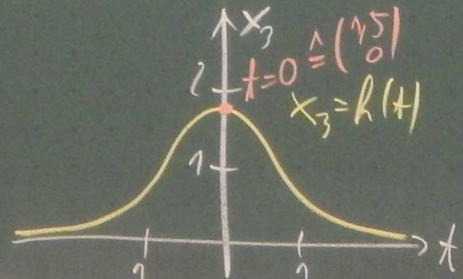
" " " " $G_2 := \left\{x = \binom{1{,}5}{0} + t\binom{0}{1}\right\}$

$g(t) = f\binom{1{,}5+t}{0} = 4 - (1{,}5+t)^2$

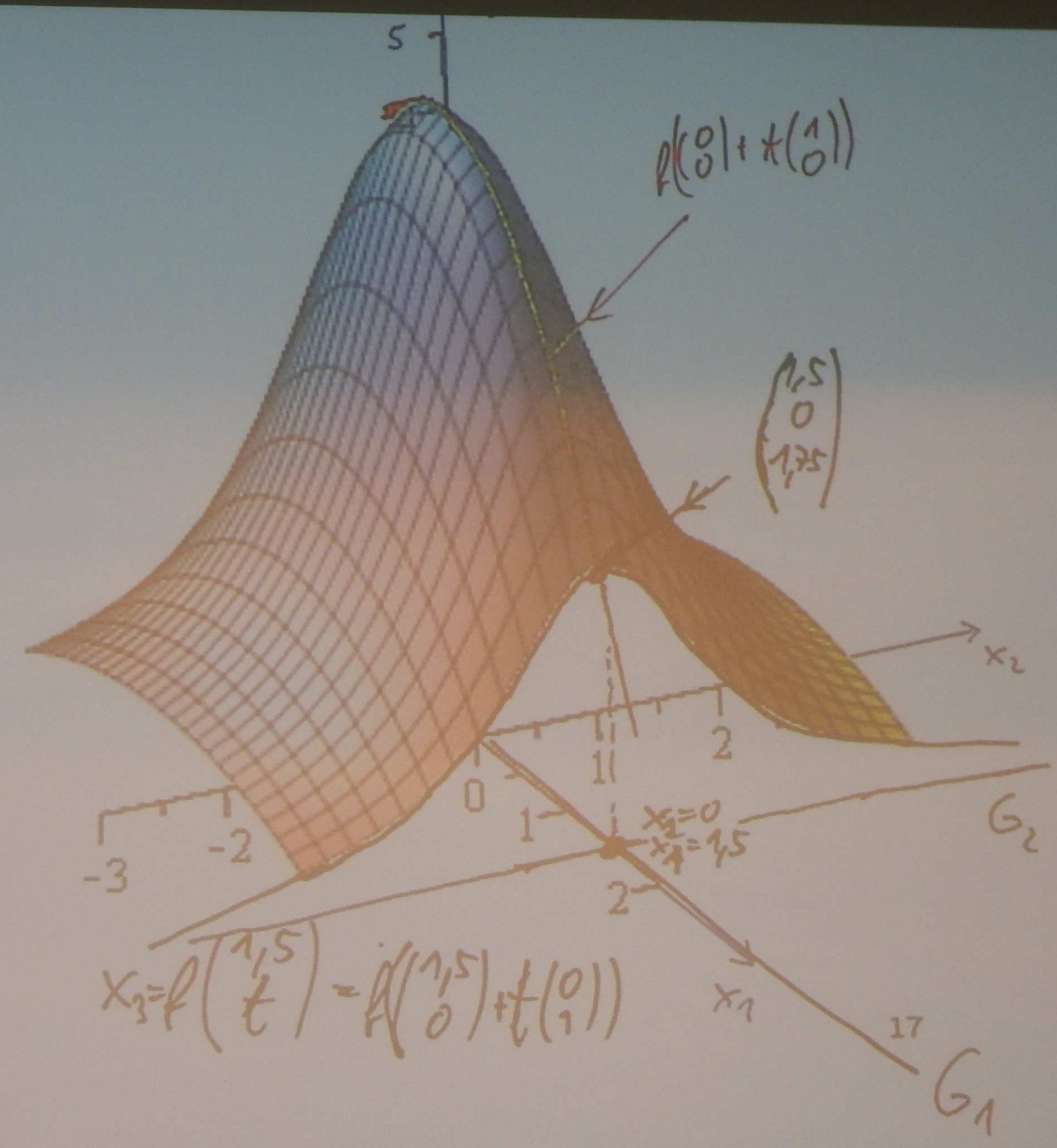


Es liegt kein Extremum vor bei $\binom{1{,}5}{0}$

$h(t) = f\binom{1{,}5}{t} = 1{,}75 \cdot \frac{1}{1+t^2}$



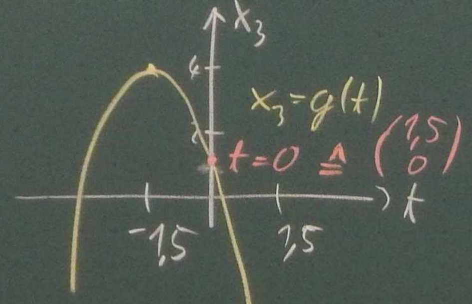
Hier liegt bei $t = 0$ ein Max vor.


5
f((0 0)+t(1 0))
(1,5 0 1,75)
x2
2
1
0
-2
-3
1
2
x2=0
x1=1,5
G2
x1
17
G1
x3=f(1,5 t)=f((1,5 0)+t(0 1))

Verhalten von f längs $G_1 := \{x = \binom{1,5}{0} + t\binom{1}{0}\}$

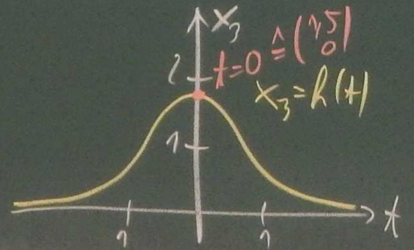
" " " " $G_2 := \{x = \binom{1,5}{0} + t\binom{0}{1}\}$

$$g(t) = f\binom{1,5+t}{0} = 4 - (1,5+t)^2$$



Es liegt kein Extremum vor bei $\binom{1,5}{0}$

$$h(t) = f\binom{1,5}{t} = 1,75 \cdot \frac{1}{1+t^2}$$



Hier liegt bei $t=0$ ein Max vor.

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, D offen und f diffbar in x_0.

Falls f in x_0 ein lokales Maximum hat, dann besitzen alle Fkten

$$g_v(t) := f(x_0 + t \cdot v)$$

ebenfalls ein lokales Max. bei $t=0$. Wir wissen für g:

Notwendig für ein lokales Max. ist $g_v'(0) = 0$

Hinreichend " " " " ist: $g_v'(0) = 0 \wedge g_v''(0) < 0$

Weiter gilt (vgl. 7.12)

$$g_v'(t) = f'(x_0 + t\cdot v)\cdot v = \sum_{j=1}^{n} (\partial_{x_j} f)(x_0 + t v)\cdot v_j$$

Da dies für alle $v \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gelten muss, folgt:

7.15 Notwendige Bed: Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, D offen, f diffbar in $x_0 \in D$. Dann:

Wenn f in x_0 ein lokales Extremum hat, dann folgt $f'(x_0) = 0$ bzw. $\nabla f(x_0) = 0$.

Anschaulich $f'(x_0) = 0$ bedeutet waagrechte Tangentialebene.

7.16 Hinreichende Bed: Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, D offen, $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$. Dann ist jede der Abbildungen $\partial_{x_j} f : D \to \mathbb{R}^n$ partiell diffbar mit stetigen Ableitungen $\partial_{x_k} \partial_{x_j} f$.

Es folgt $\frac{d}{dt} \partial_{x_j} f(x_0 + t \cdot v) = \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x_0 + t \cdot v) \cdot v_k$

$$\Rightarrow g_v''(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x_0 + t \cdot v)\, v_k v_j$$

$$\Rightarrow g_v''(0) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} \partial_{x_j} f(x_0)\, v_k v_j$$

$$= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{x_1} \partial_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(x_0) & \dots & \partial_{x_1} \partial_{x_n} f(x_0) \\ \vdots & & & \\ \partial_{x_n} \partial_{x_1} f(x_0) & \dots & \dots & \partial_{x_n} \partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}}_{\substack{n \times n\text{-Matrix} \\ =: H_f(x_0) \quad \text{Hesse-Matrix von } f}} v,\ v \right\rangle$$

Man kann beweisen:

$f'(x_0) = 0 \wedge H_f(x_0)$ ist pos. (neg.) definit $\Rightarrow$ f besitzt in x_0 ein lokales striktes Min / Max

Später: $H_f(x_0)$ ist symmetrisch. Deshalb kann der letzte Satz umformuliert werden:

7.17 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ und $f'(x_0) = 0$. Dann:

1) Hat $H_f(x_0)$ nur pos. Eigenwerte, so hat f in x_0 ein lokales striktes Min.

2) Hat $H_f(x_0)$ nur negative EWe, so hat f in x_0 ein lokales striktes Max.

3) Hat $H_f(x_0)$ sowohl positive als auch negative EWe, so hat f in x_0 einen Sattelpunkt: In jeder Umgebung von x_0 gibt es Punkte x, x', so dass $f(x) > f(x_0)$ und $f(x') < f(x_0)$.

7.18 Beisp.: $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1^2 - x_2^2)\ln(x_1)$ in $D = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 > 0\right\}$

Kritische Punkte $f'(x_0) = 0$ bzw. $\nabla f(x_0) = 0$:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x_1 \ln(x_1) + (x_1^2 - x_2^2)\frac{1}{x_1} \\ -2x_2 \ln(x_1) \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 \ln(x_1) + \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1} = 0 & (1) \\ 2x_2 \ln(x_1) = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow x_2 = 0 \vee x_1 = 1$

In (1) eingesetzt:

$x_2 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} 2x_1\ln(x_1) + \cancel{\frac{x_1^2}{x_1}}\, x_1 = 0$

$\Leftrightarrow x_1(2\ln(x_1) + 1) = 0$

$\overset{x_1>0}{\Leftrightarrow} \ln(x_1) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x_1 = e^{-1/2}$

$\Rightarrow$ Krit. Pkt $P_1(e^{-1/2}, 0)$

$x_1 = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} (1 - x_2^2)\cdot\frac{1}{1} = 0 \Leftrightarrow x_2 = \pm 1$

$\Rightarrow$ Krit. Pkte $P_{2/3}(1, \pm 1)$

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \underbrace{2\ln(x_1) + 2\frac{x_1}{x_1}}_{\partial_{x_1}\partial_{x_1} f} + 1 + \frac{x_2^2}{x_1^2} & -\frac{2x_2}{x_1} \\ \underbrace{-\frac{2x_2}{x_1}}_{\partial_{x_1}\partial_{x_2} f} & \underbrace{-2\ln(x_1)}_{\partial_{x_2}\partial_{x_2} f} \end{pmatrix}$$

Symmetrie

$$H_f\begin{pmatrix} e^{-1/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-\frac{1}{2}) + 2 + 1 + 0 & 0 \\ 0 & -2\cdot(-\frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ EWe $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 1$

$\Rightarrow$ In P_1 hat f ein lokales striktes Min.

$$H_f\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$$

EWe: $\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & \mp 2 \\ \mp 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 4 \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+4} = 2 \pm 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \lambda_1 > 0 \wedge \lambda_2 < 0$

$\Rightarrow$ In $P_{2/3}$ hat f Sattelpunkte.

7.3 Ableitung IV

7.19 Def: Sei $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$, D offen.

Dann heißt f differenzierbar in $x_0 \in D$, falls eine $m \times n$-Matrix A existiert, so dass

$$\lim_{\substack{x \to x_0,\, x \in D \\ x \neq x_0}} \frac{1}{\|x - x_0\|}\left(f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0)\right) = 0$$

oder äquivalent

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \|x - x_0\| \cdot r(x)$$

mit $\lim_{x \to x_0} r(x) = 0$

A ist eindeutig bestimmt und heißt Ableitung von f in x_0: $f'(x_0) := A$

7.20 Bem: 1) Im Fall $m = 1$ ist dies 7.4

2) Ist f in x_0 diffbar und $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$, so gilt

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(x_0) & \partial_{x_2} f_1(x_0) & \cdots & \partial_{x_n} f_1(x_0) \\ \partial_{x_1} f_2(x_0) & \cdots & & \partial_{x_n} f_2(x_0) \\ \vdots & & & \\ \partial_{x_1} f_m(x_0) & \cdots & & \partial_{x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

$$=: J_f(x_0) \quad \text{Jacobi-Matrix}$$

7.21 Beisp: $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ e^{x_1 x_2} \\ \sin(x_2) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f'\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 \\ x_2 e^{x_1 x_2} & x_1 e^{x_1 x_2} \\ 0 & \cos(x_2) \end{pmatrix} = J_f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$