## 7.22 Die Ableitung des Gradienten

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ diffbar.

Dann: $\nabla f : D \to \mathbb{R}^n : x \mapsto \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix}$

Falls $\nabla f$ in $x_0 \in D$ diffbar, dann

$$(\nabla f)'(x_0) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_2}\partial_{x_1} f(x_0) & \dots & \partial_{x_n}\partial_{x_1} f(x_0) \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ \partial_{x_1}\partial_{x_n} f(x_0) & \dots & & \partial_{x_n}\partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}$$

$= H_f(x_0)$ Hessematrix

**7.22 Beispiel:** $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \arctan(x_1 x_2)$ für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D = \mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f \\ \partial_{x_2} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+(x_1x_2)^2} \cdot x_2 \\ \frac{1}{1+(x_1x_2)^2} \cdot x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$\nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\nabla f'(x) = \begin{pmatrix} -\frac{2x_1x_2^2}{(1+(x_1x_2)^2)^2} \cdot x_2 & \overbrace{-\frac{2x_1^2x_2 \cdot x_2}{(1+(x_1x_2)^2)^2} + \frac{1}{1+(x_1x_2)^2}}^{\partial_{x_2}\partial_{x_1} f} \\ \underbrace{-\frac{2x_1x_2^2 \cdot x_1}{(1+(x_1x_2)^2)^2} + \overset{\text{gleich}}{\frac{1}{1+(x_1x_2)^2}}}_{=\partial_{x_1}\partial_{x_2} f} & -\frac{2x_1^2x_2}{(1+(x_1x_2)^2)^2} \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

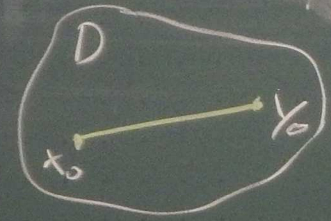
$= 2 \times 2$-Matrix

## 7.4 Mittelwertsätze und mehr

**7.24 Mittelwertsatz bei mehreren Variablen:**

Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D \to \mathbb{R})$ und

$x_0, y_0 \in D$, so dass $\{x_0 + t\cdot(y_0-x_0) : 0 \le t \le 1\} \in D$

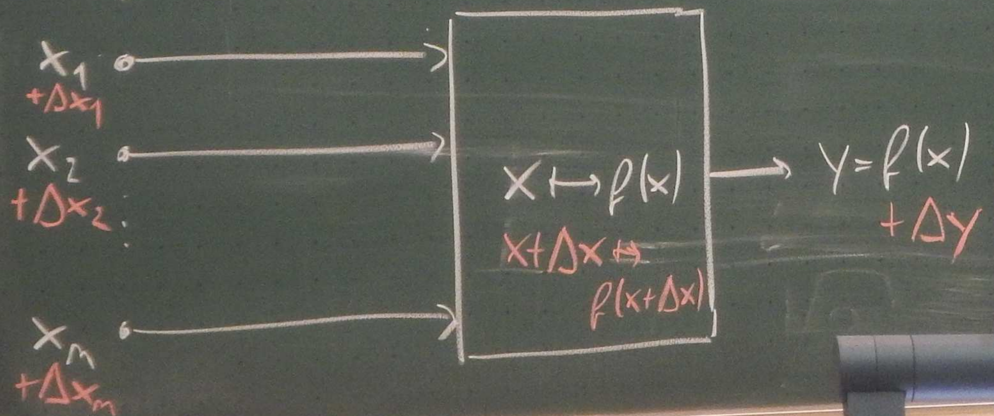



Dann:

$$\exists \tau \in ]0,1[ : f(y_0) - f(x_0) = \left\langle \nabla f(x_0+\tau\cdot(y_0-x_0)), y_0 - x_0 \right\rangle$$

## 7.25 Fehlerfortpflanzung: Gegeben sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Vorstellung: $f$ ist eine Formel, mit der aus $x_1, \dots, x_n$ der gewünschte Wert berechnet wird.




$$\Delta y = f(\underbrace{x+\Delta x}_{=:y_0}) - f(\underbrace{x}_{=:x_0}) \qquad \Rightarrow y_0 - x_0 = \Delta x$$

$$= \left\langle \nabla f(x+\Delta x+\tau\cdot\Delta x), \Delta x \right\rangle$$

$$\approx \left\langle \nabla f(x), \Delta x \right\rangle$$

z.B. $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \frac{x_1}{x_2}$ für $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in D := \{(x_1,x_2) : x_2 > 0 \wedge x_1 > 0\}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix}\frac{1}{x_2}\\[4pt] -\frac{x_1}{x_2^2}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\left\langle \nabla f(x), \Delta x\right\rangle\right| = \left|\left\langle \begin{pmatrix}\frac{1}{x_2}\\ -\frac{x_1}{x_2^2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{pmatrix}\right\rangle\right|$$

$$= \left|\frac{\Delta x_1}{x_2} - \frac{\Delta x_2\cdot x_1}{x_2^2}\right|$$

$$\le \left|\frac{\Delta x_1}{x_2}\right| + \left|\frac{\Delta x_2 \cdot x_1}{x_2^2}\right|$$

Betrachte den relativen Fehler:

$$\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}\right| \le \underbrace{\left|\frac{x_2}{x_1}\right|}_{=\frac{1}{|f(x)|}} \left(\left|\frac{\Delta x_1}{x_2}\right| + \left|\frac{\Delta x_2 \cdot x_1}{x_2^2}\right|\right)$$

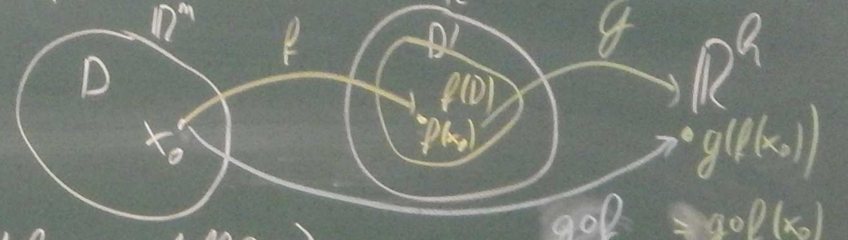
$$= \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right|$$

= Summe der relativen Fehler von $x$.

"Bei Division addieren sich die relativen Fehler".

**7.26 Satz von Schwarz**: Für $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$ gilt $\partial_{x_j}\partial_{x_k} f = \partial_{x_k}\partial_{x_j} f$. Insbesondere ist dann die Hessematrix $H_f(x)$ symmetrisch.

**7.27 Kettenregel**: Seien $f: \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \supseteq D' \to \mathbb{R}^k$ und $f(D) \subseteq D'$.




Ist $f$ in $x_0$ diffbar und $g$ in $f(x_0)$ " $\Rightarrow$ $f\circ g$ ist in $x_0$ diffbar und

$$\underbrace{(g\circ f)'(x_0)}_{k\times n} = \underbrace{g'(f(x_0))}_{k\times m} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{m\times n\text{-Matrix}}$$

**7.28 Beisp:** 1) $f\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{3\text{ Koor.}} = \underbrace{\begin{pmatrix}x_1\cdot x_2\\ x_3^2\end{pmatrix}}_{2\text{ Koord.}} \Rightarrow f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$

$$f'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix}\partial_{x_1}f_1 & \partial_{x_2}f_1 & \partial_{x_3}f_1\\ \partial_{x_1}f_2 & \partial_{x_2}f_2 & \partial_{x_3}f_2\end{pmatrix}}_{3\text{ Spalten}} \Big\}\ 2\text{ Zeilen}$$

$$= \begin{pmatrix}x_2 & x_1 & 0\\ 0 & 0 & 2x_3\end{pmatrix}$$

$$g\underbrace{\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}}_{2\text{ Koord}} = \underbrace{y_1^2+y_2}_{1\text{ Koord}}$$

$$\Rightarrow g'(y) = \underbrace{\left(\partial_{y_1}g \quad \partial_{y_2}g\right)}_{2\text{ Spalten}} \Big\}\ 1\text{ Zeile}$$

$$= (2y_1 \quad 1)$$

$$g\circ f\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{3\text{ Koord}} = \underbrace{(x_1x_2)^2 + x_3^2}_{1\text{ Koord}}$$

$$\Rightarrow (g\circ f)'(x) = \underbrace{\left(2x_1x_2^2 \quad 2x_1^2x_2 \quad 2x_3\right)}_{3\text{ Spalten}} \Big\}\ 1\text{ Zeile}$$

Mit Kettenregel:

$$(g\circ f)'(x) = \underbrace{(2y_1 \quad 1)}_{g'}\Big|_{y=f(x)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix}x_2 & x_1 & 0\\ 0 & 0 & 2x_3\end{pmatrix}}_{f'}$$

$$= (2x_1x_2 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix}x_2 & x_1 & 0\\ 0 & 0 & 2x_3\end{pmatrix} = \left(2x_1x_2\cdot x_2 + 1\cdot 0 \quad 2x_1x_2\cdot x_1 + 1\cdot 0 \quad 2x_1x_2\cdot 0 + 1\cdot 2x_3\right)$$

$$= \left(2x_1x_2^2 \quad 2x_1^2x_2 \quad 2x_3\right)$$

2) Wichtigstes Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow g \circ f = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Kettenregel: $f' = \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \\ \vdots \\ f_n' \end{pmatrix}$, $g' = (\partial_{x_1} g \ \dots \ \partial_{x_n} g)$

$$\Rightarrow (g \circ f)'(x) = (\partial_1 g(f(x)) \ \dots \ \partial_n g(f(x))) \cdot \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \partial_j g(f(x)) \cdot f_j'(x)$$

7.29 Multiindizes: Für

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ setze

$$\nabla^\alpha f := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f$$

Damit können part. Ableitungen höherer Ordnung geschickt beschrieben werden.

Außerdem für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$:

$$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$$

$$\alpha \leq \beta :\Leftrightarrow \alpha_1 \leq \beta_1 \wedge \alpha_2 \leq \beta_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \leq \beta_n$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$$

$$\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \text{ für } \beta \leq \alpha$$

7.30 Leibniz-Formel: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C^k(D \to \mathbb{R})$.
Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt

$$\nabla^\alpha (f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n} \binom{\alpha}{\beta} (\nabla^\beta f) \nabla^{\alpha-\beta} g \quad \text{in } D$$

## 7.31 Ableitung längs einer Geraden:

Für $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $\{x_0 + t \cdot v : 0 \le t \le 1\} \subseteq D$ setze

$$g(t) := f(x_0 + t \cdot v)$$

Ist $f \in C^m(D \to \mathbb{R})$, so ist $g$ auch $m$-Mal diffbar und

$$g^{(m)}(t) = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} (\nabla^\alpha f)(x_0 + t \cdot v) \cdot v^\alpha$$

wobei $v^\alpha = v_1^{\alpha_1} \cdot v_2^{\alpha_2} \cdots v_n^{\alpha_n}$.

Zum Beweis: $g'(t) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f(x_0 + t \cdot v) \cdot v_j = \sum_{|\alpha|=1} \nabla^\alpha f(x_0 + t \cdot v) \cdot v^\alpha$

denn z.B. $v^{(0,1,0,\dots,0)} = v_2$, $\nabla^{(0,1,0,\dots,0)} f = \partial_{x_2} f$

$$g''(t) = \sum_{j=1}^n \Big( \sum_{k=1}^n \underbrace{\partial_{x_k} (\partial_{x_j} f)(x_0 + t \cdot v) \cdot v_k}_{} \Big) \cdot v_j$$

$\partial_{x_1} \partial_{x_2} f = \partial_{x_2} \partial_{x_1} f$ kommt zweimal vor

$\partial_{x_1} \partial_{x_1} f$ kommt ein Mal vor

$$= \sum_{|\alpha| = 2} \frac{2}{\alpha!} \nabla^\alpha f(x_0 + t \cdot v) \cdot v^\alpha$$

$$\alpha! = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha \text{ zwei Koordinaten 1 besitzt} \\ 2 & \text{falls } \alpha \text{ eine Koordinate 2 besitzt} \end{cases}$$

## 7.32 Satz von Taylor II:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{m+1}(D \to \mathbb{R})$, $x, x_0 \in D$ so dass $\{x_0 + t(x - x_0) : 0 \le t \le 1\} \subseteq D$. Dann ex. $\tau \in ]0,1[$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \nabla^{\alpha} f(x_0) \cdot (x-x_0)^{\alpha}$$

$$+ \underbrace{\sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} (\nabla^{\alpha} f)(x_0 + \tau \cdot (x-x_0))(x-x_0)^{\alpha}}_{=: R_{m+1}(x)}$$

7.33 Beisp. $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2}$ bei $(0,0) = x_0$

$\partial_{x_1} f = (2x_1 + x_2) e^{\cdots} \underset{\binom{x_1}{x_2} = \binom{0}{0}}{=} 0$

$\partial_{x_2} f = (x_1 + 2x_2) e^{\cdots} = 0$

$\partial_{x_1}^2 f = (2 + (2x_1 + x_2)^2) \cdot e^{\cdots} = 2$

$\partial_{x_1} \partial_2 f = (1 + (2x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2)) e^{\cdots} = 1$

$\partial_{x_2}^2 f = (2 + (x_1 + 2x_2)^2) e^{\cdots} = 2$

Taylor

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{\alpha = (0,0,\ldots,0)} + \sum_{k=1}^{2} \ldots + R_3(x)$$

$= 1 + (\alpha = (1,0)) \; \frac{1}{1} \cdot \partial_{x_1} f(0) \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \end{pmatrix}^{(1,0)}$

$+ (\alpha = (0,1)) \; \frac{1}{1} \partial_{x_2} f(0) \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 0 \end{pmatrix}^{(0,1)}$

$+ (\alpha = (2,0)) \; \frac{1}{2} \partial_{x_1}^2 f(0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(2,0)}$

$+ (\alpha = (1,1)) \; \frac{1}{1} \partial_{x_1} \partial_{x_2} f(0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(1,1)}$

$+ (\alpha = (0,2)) \; \frac{1}{2} \partial_{x_2}^2 f(0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(0,2)}$

$+ R_3(x)$

$= 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x_1^2 + 1 \cdot 1 \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{1}{2} 2 \cdot x_2^2$

$+ R_3(x)$