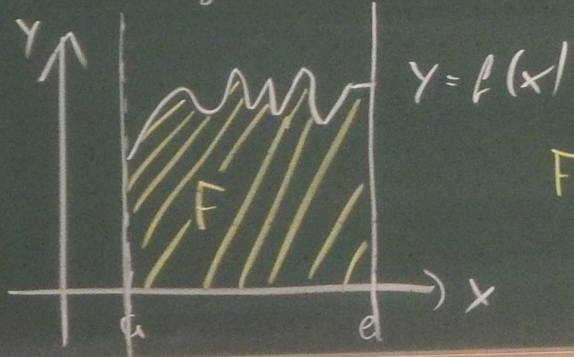
7. Integration

7.1 Treppen- und Regelfkt.en

Gegeben $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Gesucht: Fläche, die vom Graphen von f, und der x-Achse und den Geraden $x=a$, $x=b$ begrenzt wird



$F=?$

Existiert die Fläche?

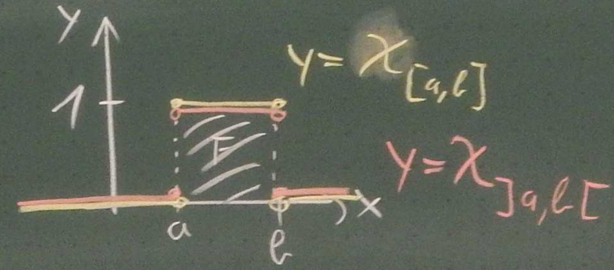
Idee: Alles auf Rechteckflächen zurückführen

8.1 Def: 1) Für $J\subseteq\mathbb{R}$, $J\neq\emptyset$, heißt

$$\chi_J:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto \begin{cases}1 & \text{falls } x\in J\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

charakteristische Funktion von J.

z.B.



2) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt <u>Treppenfunktion</u> auf $[a,b]$ falls es $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ gilt, so dass f jeweils auf $]x_{j-1},x_j[$ konstant ist

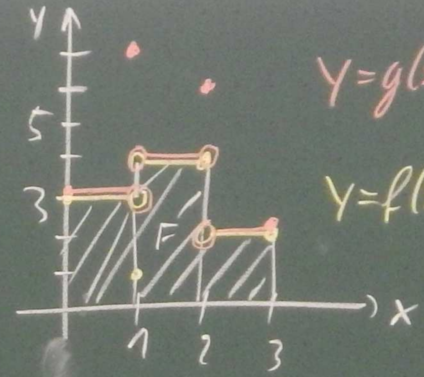
3) Zwei Treppenfunktionen f,g auf $[a,b]$ heissen <u>gleich fast überall</u>: $f=g$ f.ü., falls $f(x)=g(x)$ für $x\in[a,b]$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen.

<u>8.2 Beisp:</u>

$$f(x)=\begin{cases}3, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\\ 4, & 1<x\le 2\\ 2, & 2<x\le 3\end{cases}$$

$[a,b]=[0,3]$

$x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$



$$\int_0^3 f = 3\cdot 1+4\cdot 1+2\cdot 1 = 9$$

$$g(x) = 3\cdot\chi_{[0,1]}+4\chi_{[1,2]}+2\chi_{[2,3]}$$

$\Rightarrow f=g$ f.ü. auf $[a,b]$

<u>8.3 Satz:</u> 1) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist Treppenfkt. genau dann, wenn

$\exists\, I_1,\ldots,I_m$ Intervalle $\exists\, c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{R}$: $f=\sum_{k=1}^{m} c_k\chi_{I_k}$ f.ü. auf $[a,b]$

2) Die Menge der Treppenfunktionen auf $[a,b]$ bildet einen Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Außerdem: Produkt von Treppenfkt.en } sind
Betrag " "

Treppenfkt.en.

8.4 Def: Ist f Treppenfkt. auf $[a,b]$ und

$$f = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{[a_k, b_k]} \text{ f.ü. auf } [a,b],$$

so heißt

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{k=1}^{m} c_k (b_k - a_k)$$

das bestimmte Integral von f. Schreibe kurz $\int_a^b f$

Insbesondere gilt: $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g$.

8.5 Def: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Regelfunktion, falls eine Folge (t_n) von Treppenfkt.en existiert, mit $t_n(x) \to f(x)$ gleichmäßig auf $[a,b]$.

Insbesondere ist jede Regelfkt. beschränkt.

Beweis Beschränktheit: Wähle $\varepsilon = 1$

$\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_1\ \forall x \in [a,b]: |t_n(x) - f(x)| < 1$

Wähle $n := N_1 + 1$.

t_{N_1+1} ist beschränkt, da endliche Summe: $|t_{N_1+1}(x)| \le K$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b]: |f(x)| \le \underbrace{|f(x) - t_{N_1+1}(x)|}_{<1} + \underbrace{|t_{N_1+1}(x)|}_{\le K} \le K$ □

8.6 Welche Fkten sind Regelfkten:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gelten:

1) f stetig oder monoton $\Rightarrow$ f ist Regelfkt.

Genauer:

$$f \text{ ist Regelfkt.} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x_0 \in \,]a,b] : \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) \text{ exist.} \\ \text{und} \\ \forall x_0 \in [a,b[\,: \lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) \text{ exist.} \end{cases}$$

2) $\mathcal{R}([a,b]) := \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ ist Regelfkt.} \}$

ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Außerdem: Betrag und Produkt von Regelfkten sind Regelfkten.

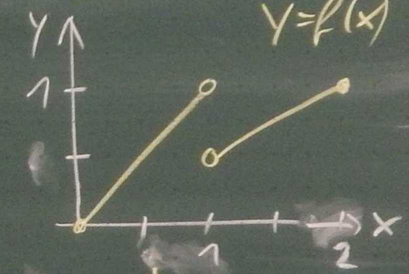
$\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$ ist eine Norm auf $\mathcal{R}([a,b])$.

$(\mathcal{R}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein vollständiger Vektorraum

(Banachraum)

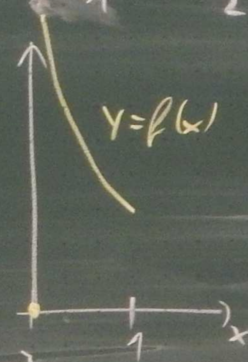
Beispiele:

1) $$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ \frac{x}{2}, & 1 < x \le 2 \end{cases}$$



f ist Regelfkt. auf $[0,2]$.

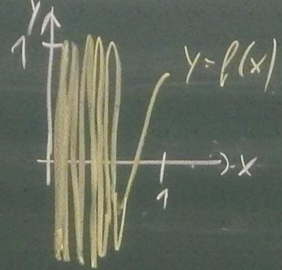
2) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



f ist nicht beschränkt

$\Rightarrow$ keine Regelfunktion auf $[0,1]$

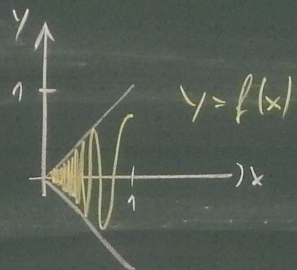
3) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases}$



$\lim_{x\downarrow 0} f(x)$ exist. nicht

$\Rightarrow$ keine Regelfkt.

4) $f(x) = \begin{cases} x\cdot \sin\frac{1}{x} & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$



Für $x_0 \neq 0$ ist f stetig in x_0

$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 0$

$\Rightarrow$ f ist Regelfunktion.

<u>8.7 Satz und Def</u>: Sei $f \in R([a,b])$ und (t_n) Folge von Treppenfkt.en mit $t_n \to f$ gleichm. auf $[a,b]$. Dann exist. der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b f := \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n$$

und ist unabhängig von der gewählten Folge (t_n).

$\int_a^b f$ heißt das <u>bestimmte</u> (Regel-)<u>Integral</u> von f über $[a,b]$.

Es gilt: $\int_a^a f = 0$

Man setzt $\int_b^a f := -\int_a^b f$ für $a<b$.

§8 Eigenschaften: Seien $a<b$ und $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. Dann:

1) Linearität: $\int_a^b (\alpha f + \beta \cdot g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$

2) Monotonie:

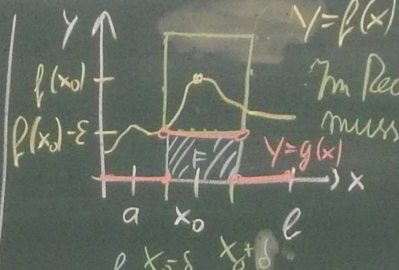
$f \geq 0$ auf $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$

$f \leq g$ " " $\Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g \quad (*)$

Spezieller: f stetig in $x_0 \in [a,b] \wedge f(x_0) > 0$

$\Rightarrow \int_a^b f > 0$

Denn:



Im Rechteck muss der Graph von f verlaufen

Wähle $\varepsilon := \frac{f(x_0)}{2} > 0$

Definiere $g(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_0-\delta \\ \frac{f(x_0)}{2} & \text{für } x_0-\delta < x < x_0+\delta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$F = \int_a^b g$

$\Rightarrow g(x) \leq f(x)$ auf $[a,b]$

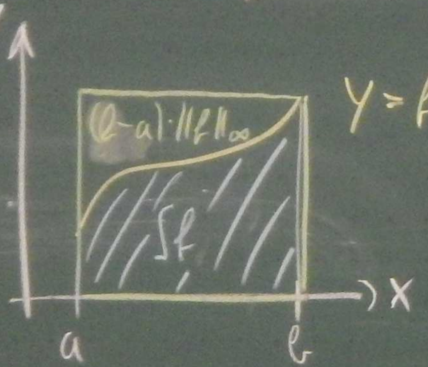
$\overset{(*)}{\Rightarrow} \underbrace{\int_a^b g}_{= 2\delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0} \leq \int_a^b f$

$\Rightarrow 0 < \int_a^b f$

3) $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \int_a^b f = \int_a^b g$

4) $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f| \le (b-a)\cdot\|f\|_\infty$

Achtung: Gilt nur für $a<b$

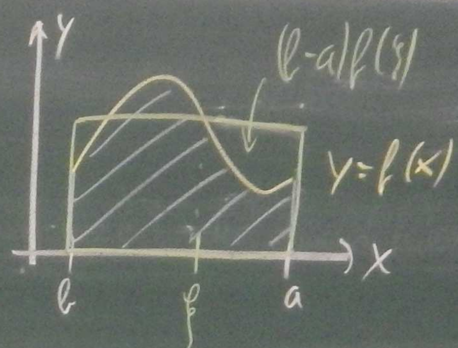


Insbesondere:

$$\left|\int_a^b f - \int_a^b g\right| \overset{1)}{=} \left|\int_a^b (f-g)\right| \le (b-a)\|f-g\|_\infty$$

$\Rightarrow$ die Abb. $R([a,b]) \ni f \mapsto \int_a^b f \in \mathbb{R}$ ist stetig

5) Falls f stetig auf $[a,b]$ $\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f = f(\xi)(b-a)$



Allgemeiner: $g \ge 0$ und f stetig

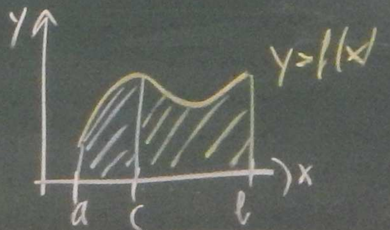
$$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: \int_a^b f\cdot g = f(\xi)\int_a^b g$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

6) Für $a \le c \le d \le b$ setze $\int_c^d f := \int_a^b \chi_{[c,d]}\cdot f$

Für $a \le c \le b$ gilt dann

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$



8.2 Stammfunktionen

8.9 Idee: Ist $f \in \mathcal{R}([a,b])$, so heißen

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f$$

$$G : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_x^b f$$

Flächeninhaltsfunktionen

8.10 Satz: F, G sind stetig

Beweis: Sei $x_0 \in [a,b]$.

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| = \left| \int_x^{x_0} f \right| \overset{(4)}{\leq} |x_0 - x| \, \|f\|_\infty$$

$\Rightarrow$ F ist stetig.

Wegen $G(x) = \int_a^b f - \int_a^x f = \int_a^b f - F(x)$

ist auch G stetig.

8.11 Hauptsatz der Diff.-/Integralrechn.:

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist F in $]a,b[$ differenzierbar, und $F' = f$

Also: Integration ist Umkehrung der Differentiation.