8.12 Def: Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Eine Fkt. $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt <u>Stammfunktion</u> von f, falls F stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf $]a,b[$ ist mit $F'(x) = f(x)$ für $x \in]a,b[$.

Hauptsatz 8.11: f stetig $\Rightarrow$ Flächeninhaltsfkt ist Stammfkt.

Alle Stammfkten zu f:

F Stammfkt., $c \in \mathbb{R} \Rightarrow F + c$ ist Stammfkt.

F, G Stammfkt von f $\Rightarrow (F-G)'(x) = f(x) - f(x) = 0 \overset{6.21}{\Rightarrow} F - G = \text{konst.}$

8.13 Flächenberechnung: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfkt. von f, so gilt für $a \le c \le d \le b$:

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c)$$
$$=: F(x)\Big|_{x=c}^{d} =: \big[F(x)\big]_{x=c}^{d}$$

Beweis: Sei $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt$

$\overset{8.11}{\Rightarrow}$ G ist Stammfkt. von f

F, G Stammfkten $\Rightarrow \exists \gamma \in \mathbb{R}: F = G + \gamma$

$$\Rightarrow \int_c^d f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$$

$= G(d) - G(c) + \gamma - \gamma$

$= F(d) - F(c) \qquad \square$

<u>8.14 Beispiele:</u> 1) $\int_0^2 |x^2 - 1| \, dx$

$= \int_0^1 \underbrace{(1 - x^2)}_{f(x)} dx + \int_1^2 \underbrace{(x^2 - 1)}_{g(x)} dx$

z. B. $F(x) = x - \frac{x^3}{3}$ z. B. $G(x) = \frac{x^3}{3} - x + \underbrace{1}_{\text{unnötig}}$

(ein F genügt)

$\overset{8.13}{=} \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x + 1\right]_{x=1}^{2}$

$= 1 - \frac{1}{3} - (0 - \frac{0}{3}) + \frac{8}{3} - 2 + \cancel{1} - (\frac{1}{3} - 1 + \cancel{1}) = 2$

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

Flächeninhaltsfkt. $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$

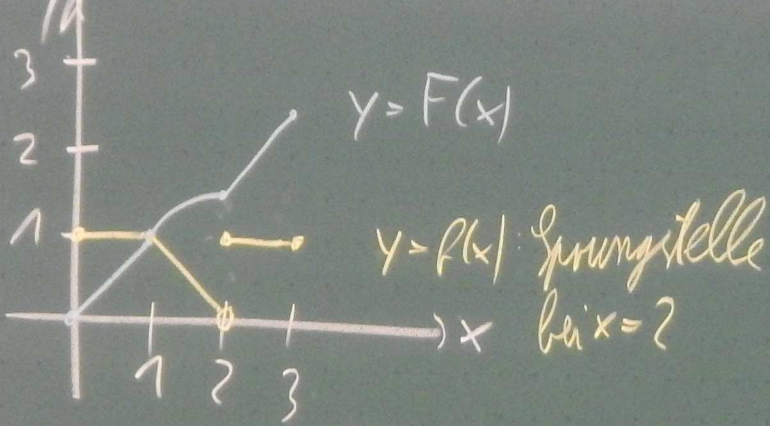
$0 \le x \le 1: F(x) = [t]_0^x = x$

$1 \le x \le 2: F(x) = \int_0^1 f(t) \, dt + \int_1^x f(t) \, dt = 1 + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_{t=1}^{x}$

$= 1 + 2x - \frac{x^2}{2} - (2 - \frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2}$

$2 \le x \le 3: F(x) = F(2) + \int_2^x f(t) \, dt$

$= \frac{3}{2} + [t]_{t=2}^{x} = \frac{3}{2} + x - 2 = x - \frac{1}{2}$



F ist in $x=1$ diffbar mit $F'(1)=1$, aber in $x=2$ nicht.

F ist stetig (siehe 8.10)

8.15 Def: Die Menge aller Stammfktn

$$\int f(x)\,dx = \{F:[a,b]\to\mathbb{R} \mid F \text{ ist Stammfkt. von } f\}$$

… unbestimmtes Integral über f.

Ist F eine Stammfkt. von f, so gilt

$$\int f(x)\,dx = \{F+C : C\in\mathbb{R}\}.$$

Schreibe kurz: $\int f(x)\,dx = F(x)+C$.

8.3 Wie findet man Stammfktn?

Wichtigste Methode: Raten, z.B.

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad \text{für } \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)+C$$

$$\int e^x\,dx = e^x+C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)+C$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{x}\,dx}_{} = \begin{cases} \ln(x)+c, & x>0 \\ \ln(-x)+c, & x<0 \end{cases} \overset{\text{kurz}}{=} \ln|x|+c$$

beschreibt Stammfkten auf $]-\infty,0[$ oder auf $]0,\infty[$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)+c \text{ auf } [-1,1]$$

Ableitungsregeln:

Produktregel: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

Kettenregel: $(F\circ g)'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x)$

Integrieren: $\int (f\cdot g)'\,dx = f(x)\cdot g(x) + C$

$$\Rightarrow f(x)\cdot g(x) + C = \int f'\cdot g\,dx + \int f\cdot g'\,dx$$

$$\Rightarrow \int f'\cdot g\,dx = f(x)\cdot g(x) + C - \int f\cdot g'\,dx$$

kann weggelassen werden, da in den anderen Termen Konstanten enthalten.

8.16 Ratehilfen: 1) Seien $u,v:[a,b]\to\mathbb{R}$ diffbar auf $]a,b[$. Dann gilt die Formel für partielle Integration: $\int u'\cdot v\,dx = u\cdot v - \int u\cdot v'\,dx$

2) Seien $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ stetig diffbar.

Dann

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \Big[\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\substack{F \text{ Stammfkt.}\\ F(\varphi(t))}}\Big]_{x=\varphi(t)}$$

Wichtig: Diese Formel kann auch von rechts nach links benützt werden, wenn φ bijektiv ist:

Setze $t := \varphi^{-1}(x)$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = \Big[\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\Big]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

(Integration durch Substitution).

8.17 Beispiele: 1) $\int \underbrace{x}_{=v}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{=u'}\,dx = x\cdot\sin(x) - \int \sin(x)\cdot 1\,dx$

$\boxed{\Rightarrow v'=1 \quad \Rightarrow u=\sin x}$

$= x\cdot\sin(x) + \cos(x) + C$

2) $\int \ln(x)\,dx = \int 1\cdot\ln(x)\,dx$

$\boxed{u'=1,\ u(x)=x \quad v=\ln(x),\ v'=\frac{1}{x}}$

$= x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx$

$= x\ln(x) - x + C$ in $]0,\infty[$.

3) $\int \cos^2(x)\,dx = \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,dx$

$\boxed{u'=\cos(x),\ u(x)=\sin(x) \quad v=\cos(x),\ v'(x)=-\sin(x)}$

$= \sin(x)\cos(x) + \int \underbrace{\sin(x)\cdot\sin(x)}_{=1-\cos^2(x)}\,dx$

$[$.

x

$= \sin(x)$

$= -\sin(x)$

dx

$$= \sin(x)\cdot\cos(x) + x - \int \cos^2(x)\,dx \quad \Big| + \int \cos^2(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\sin(x)\cos(x) + x + c\right)$$

4) $$\int \underbrace{2t}_{\varphi'(t)} \sin(\underbrace{t^2+1}_{\varphi(t)})\,dt \overset{\text{Substitution}}{=} \left[\int \sin(x)\,dx\right]_{x=t^2+1}$$

$$= -\cos(t^2+1) + C$$

5) Für $x>0$: $$\int \frac{1}{4+x^{1/3}}\,dx = \left[\int \frac{1}{t}\cdot 3\underbrace{(t-4)^2}_{=t^2-8t+16}\,dt\right]_{t=4+x^{1/3}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Subst.: } t := 4+x^{1/3} \\ &\Leftrightarrow x = (t-4)^3 = \varphi(t) \\ &\varphi'(t) = 3(t-4)^2 \end{aligned}}$$

$$= \left[3\left(\int \left(t - 8 + \frac{16}{t}\right)dt\right)\right]_{t=4+x^{1/3}}$$

$$= \left[3\left(\frac{t^2}{2} - 8t + 16\ln(t) + c\right]_{t=4+x^{1/3}}$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}(4+x^{1/3})^2 - 8(4+x^{1/3}) + 16\ln(4+x^{1/3}) + c\right)$$

6) Für $-4 \le x \le 4$: $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Subst.: } x = 2\sin(t) = \varphi(t), \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ &\varphi'(t) = 2\cos(t), \quad t = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}}$$

$$\overset{\text{Subst.}}{=} \left[\int \underbrace{\sqrt{4-4\sin^2(t)}}_{\substack{=4\cos^2(t) \\ =2|\cos(t)| = 2\cos(t)}} \cdot 2\cos(t)\,dt\right]_{t=\arcsin(\frac{x}{2})}$$

$$= \left[\int 4\cos^2(t)\,dt\right]_{t=\arcsin(\frac{x}{2})}$$

$$\overset{3)}{=} \left[2\sin(t)\underbrace{\cos(t)}_{=\sqrt{1-\sin^2(t)}} + 2t + c\right]_{t=\arcsin(\frac{x}{2})}$$

$$= 2\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

8.4 Integration gebrochen rationaler Fkten

Beispiel: $\underbrace{\frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{3}{x-2}}_{\text{leicht zu integrieren}} \overset{\text{Hauptnenner}}{=} \underbrace{\frac{-x-1}{(x-1)^2(x-2)}}_{\text{schwierig}}$

Frage: Geht das auch umgekehrt für Polynome

P, Q:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum \frac{a_j}{(x-x_j)^{n_j}}$$

Antwort: In $\mathbb{C}$ geht das immer

In $\mathbb{R}$ so ähnlich