

8.18 Hilfsatz: Seien P, Q teilerfremde Polynome (d.h. sie haben keine gemeinsame Nullstelle) mit $\text{Grad}(P) < \text{Grad}(Q)$, und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ m -fache Nullstelle von Q , d.h.

$$Q(z) = (z - \lambda)^m Q_1(z) \quad \text{mit } Q_1(\lambda) \neq 0$$

Q_1 Polynom.

Dann gibt es $a_1 \in \mathbb{C}$ und ein Polynom P_1 , so dass

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_1}{(z - \lambda)^m} + \frac{P_1(z)}{(z - \lambda)^{m-1} Q_1(z)} \quad (*)$$

und $\text{Grad}(P_1) < \text{Grad}(z \mapsto (z - \lambda)^{m-1} Q_1(z))$

a_1 und P_1 sind eindeutig.

Beweis der Eindeutigkeit und Berechnung von a_1 :

Mult. (*) mit $(z - \lambda)^m$

$$\frac{P(z)}{Q_1(z)} = a_1 + (z - \lambda) \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$$

Für $z \rightarrow \lambda$ bzw. $z = \lambda$ folgt

$$\frac{P(\lambda)}{Q_1(\lambda)} = a_1 + 0$$

(Zerhalteremethode).

Fortsetzung dieses Verfahrens liefert

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_1}{(z-\lambda)^n} + \frac{a_2}{(z-\lambda)^{n-1}} + \dots + \frac{a_m}{z-\lambda} + \frac{P_m(z)}{Q_1(z)}$$

Wobei $\text{Grad}(P_m) < \text{Grad}(Q_1)$

8.19 Beispiel: $\frac{z^6}{(z-i)^4(z+2-i)^2(z-1)} \quad \left. \begin{array}{l} \} = P(z) \\ \} = Q(z) \end{array} \right\}$

$$\text{Grad}(Q) = 7 > \text{Grad}(P) = 6$$

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \stackrel{\text{Theorie}}{=} \frac{a_1}{(z-i)^4} + \frac{a_2}{(z-i)^3} + \frac{a_3}{(z-i)^2} + \frac{a_4}{(z-i)} + \frac{P_4(z)}{(z+2-i)^2(z-1)}$$

$$= \frac{b_1}{(z+2-i)^2} + \frac{b_2}{z+2-i} + \frac{\tilde{P}(z)}{z-1}$$

Wobei $\text{Grad}(\tilde{P}) < \text{Grad}(z \mapsto (z-1)) = 1$
 $\Rightarrow \text{Grad}(\tilde{P}) = 0$, also $\tilde{P} = \text{konst.}$

8.20 Komplexe Partialbruchzerlegung:

Seien P, Q teilerfremde Polynome mit
 $\text{Grad}(P) < \text{Grad}(Q)$ und

$$Q(z) = a_n (z-\lambda_1)^{m_1} \dots (z-\lambda_k)^{m_k}$$

Dann gibt es eindeutig best. $a_{ji} \in \mathbb{C}$,
 so dass

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{a_{1,i}}{z-\lambda_i} + \frac{a_{2,i}}{(z-\lambda_i)^2} + \dots + \frac{a_{m_i,i}}{(z-\lambda_i)^{m_i}} \right)$$

8.21 Bem: 1) Falls $\text{Grad}(P) \geq \text{Grad}(Q)$:

Zuerst abdividieren (Polynomdivision):

$$P(z) : Q(z) = P_1(z) + \frac{R(z)}{Q(z)}$$

mit $\text{Grad}(R) < \text{Grad}(Q)$.

2) Falls P, Q nicht teilerfremd: Kürze
durch das größte gemeinsame Teilerpolynom.

8.22 Beispiel: $\frac{3x^2 - 4x + 5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{P(x)}{Q(x)}$

$P(-1) = 12 \neq 0$
$P(1) = 4 \neq 0$
$\text{Grad}(P) = 2$
$< \text{Grad}(Q) = 3$

Theorie $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$

Zuhaltemethode: Mult. mit $(x+1)$:

$$\frac{P(x)}{(x-1)^2} = a + (x+1)(\dots) \stackrel{x=-1}{\Rightarrow} \frac{12}{4} = a + 0$$

$$\Rightarrow a = 3$$

Mult mit $(x-1)^2$:

$$\frac{P(x)}{x+1} = c + (x-1)^2 \frac{a}{x+1} + (x-1)b$$

$$x=1 \Rightarrow \frac{4}{2} = c + 0 \Rightarrow c = 2$$

b kann nicht durch Zuhaltemethode berechnet werden. Setze $a=3, c=2$ ein:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 - 4x + 5}{(x+1)(x-1)^2} &= \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1} \Rightarrow b=0 \\ &= \frac{3(x-1)^2 + 2(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 4x + 5}{(x+1)(x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int \frac{3x^2 - 4x + 5}{(x+1)(x-1)^2} dx = \int \frac{3}{x+1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx$$

$$= 3 \ln|x+1| - \frac{2}{x-1} + C$$

8.23 Wiederholung: Sei Q reelles Polynom, d.h. Polynom mit reellen Koeffizienten.

Dann:

$$Q(\lambda) = 0 \Rightarrow Q(\bar{\lambda}) = 0$$

ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ Nullstelle der Vielfachheit n , so folgt

$$Q(x) = (x-\lambda)^n (x-\bar{\lambda})^n Q_1(x)$$

wobei Q_1 reelles Polynom und $Q(\lambda) \neq 0, Q(\bar{\lambda}) \neq 0$.

$$\text{Mit } (x-\lambda)(x-\bar{\lambda}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)x + |\lambda|^2 = x^2 + \beta x + \gamma$$

$$\text{folgt } Q(x) = (x^2 + \beta x + \gamma)^n Q_1(x)$$

Verfahren fortsetzen liefert folgende reelle Zerlegung von Q : Sind

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ reelle Nullstellen von Q

$\lambda_{k+1}, \bar{\lambda}_{k+1}, \dots, \lambda_\ell, \bar{\lambda}_\ell$ nichtreelle Nullst. von Q ,

dann

$$Q(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} (x-\lambda_2)^{n_2} \dots (x-\lambda_k)^{n_k}$$

$$\cdot (x^2 + \beta_{k+1}x + \gamma_{k+1})^{n_{k+1}} \dots (x^2 + \beta_\ell x + \gamma_\ell)^{n_\ell} \cdot a_n (*)$$

Vielfachheit von λ_{k+1}

$$\beta_{k+1} = -2\operatorname{Re}\lambda_{k+1}, \gamma_{k+1} = |\lambda_{k+1}|^2$$

8.24 Reelle Partialbruchzerlegung: Seien P, Q teilerfremde reelle Polynome mit $\text{Grad}(P) < \text{Grad}(Q)$, und Q besitze die Faktorisierung (*)
Dann kann $\frac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe von Termen der Form

$$\frac{a_i}{(x-\lambda_j)^i} \quad \text{mit } 1 \leq j \leq h, 1 \leq i \leq n_j$$

$$\frac{b_j x + c_j}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^i} \quad \text{mit } h+1 \leq j \leq l, 1 \leq i \leq m_j$$

Berechnung der Koeffizienten durch

- Zerhaltungsmethode
- Einsetzen verschiedener x -Werte ($\rightarrow$ LGS)
- Hauptnenner und Koeffizientenvergleich ($\rightarrow$ LGS)

8.25 Beisp: 1) $Q(x) = (x+2)(x+3)^2(x^2-2x+2)^2$

$P(x) = (x-1)(x-2)^2$ hat keine gemeinsame Nullst. mit Q
keine reelle Nullst.

$$\text{Grad}(P) = 3 < 5 = \text{Grad}(Q)$$

$$\text{Theorie} \Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2}{x+3} + \frac{a_3}{(x+3)^2} +$$

$$+ \frac{b_1 x + c_1}{x^2 - 2x + 2} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2 - 2x + 2)^2}$$

$$2) f(x) = \frac{2x^4 - x^3}{x^3 + 1} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$\text{Grad}(P) = 4 > \text{Grad}(Q) = 3 \Rightarrow \text{Polynomdiv.}$$

$$\begin{array}{r} (2x^4 - x^3) \\ - (2x^4 + 2x) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - 2x \\ - (-x^3 - 1) \\ \hline \end{array}$$

$$-2x+1$$

$$(x^3+1) = 2x-1 + \frac{-2x+1}{x^3+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x-1 + \frac{-2x+1}{x^3+1} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{P}(x) \\ Q(x) \end{array} \right.$$

$$\text{Grad}(\tilde{P}) = 1 < \text{Grad}(Q) = 3$$

$\tilde{P}$ hat nur Nullst. $x_1 = \frac{1}{2}$, $Q(x_1) \neq 0$

$$(x^3+1) \cdot (x+1) = x^2 - x + 1$$

$$\begin{array}{r} -(x^2+x^2) \\ \hline -x^2+1 \\ - (-x^2-x) \\ \hline x+1 \\ - (x+1) \\ \hline 0 \end{array}$$

Weitere Nullst. von Q:

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

=> volle Faktorisierung $Q(x) = (x+1)(x^2-x+1)$

$$\text{Theorie} \Rightarrow \frac{\tilde{P}(x)}{Q(x)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

Zuhaltemethode: Mult. mit $(x+1)$:

$$\frac{-2x+1}{x^2-x+1} = a + (x+1)(\dots) \stackrel{x=-1}{\Rightarrow} \frac{3}{3} = a \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+1}{x^3+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

$$\text{Setze } x=0: \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{c}{1} \Rightarrow c=0$$

$$\text{Setze } x=1, c=0: \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{b+0}{1} \Rightarrow b=-1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x-1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1 \times}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = \int \underbrace{(2x-1 + \frac{1}{x+1})}_{(1)} dx + \int \underbrace{\frac{-x}{x^2-x+1}}_{(2)} dx$$

$$(1) = x^2 - x + \ln|x+1| + C$$

$$(2) = \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{4}} \int \frac{1}{(\frac{\sqrt{4}}{3}(x-\frac{1}{2}))^2 + 1} dx$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{4}}{3}} \arctan\left(\frac{\sqrt{4}}{3}(x-\frac{1}{2})\right) + C$$

$$(2) = -\frac{1}{2} \int \frac{2x-1+1}{x^2-x+1} dx$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \underbrace{\int \frac{1}{x^2-x+1} dx}_{(3)} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\ln|x^2-x+1| + (3) \right) = (3)$$

$$\Rightarrow \int f(x) dx = x^2 - x + \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1|$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \sqrt{\frac{3}{4}} \arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}(x-\frac{1}{2})\right) + C$$