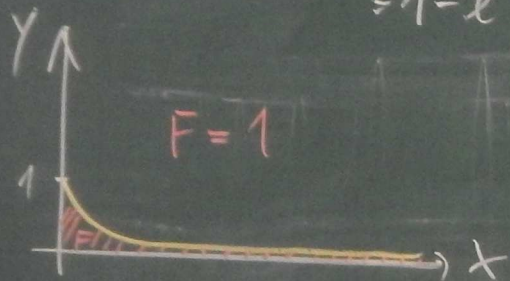


8.5 Uneigentliche Integrale

Beobachtung: $\int_0^B e^{-x} dx = [-e^{-x}]_{x=0}^B$
 $= 1 - e^{-B} \rightarrow 1$ für $B \rightarrow \infty$



8.26 Def. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt lokal integrierbar,
falls die Einschränkung von f auf jedes

Intervall $[a, b] \subseteq I$ integrierbar ist.

8.27 Beispiel 1) $f: I = [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto e^{-x}$
ist lokal integrierbar.

2) $f: I =]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto \frac{1}{x}$ ist lokal
integrierbar, denn $[a, b] \subseteq I \Rightarrow 0 < a < b \leq 1$
 $\Rightarrow f$ ist integrierbar über $[a, b]$

3) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar $\Rightarrow f$ ist lokal int. bar

8.28 Def. Sei $I = [a, b[$, wobei $-\infty < a < b \leq \infty$
und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann heißt

f uneigentlich integrierbar über I , falls

$$\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x) dx =: \int_a^b f(x) dx$$

existiert. Sprichweise: $\int_a^b f(x) dx$ konvergiert

Falls der Grenzwert für $\beta \uparrow b$ nicht existiert:

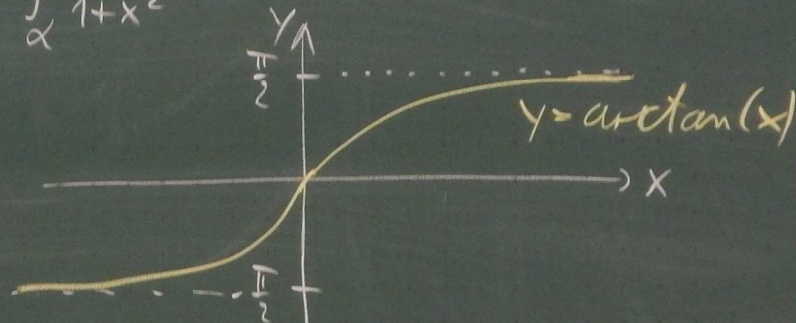
$$\int_a^b f(x) dx \text{ divergiert}$$

Genauso für $I =]a, b]$: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x) dx$

Und für $I =]a, b[$: $\int_a^b f(x) dx := \lim_{\alpha \downarrow a} \lim_{\beta \uparrow b} \int_\alpha^\beta f(x) dx$

8.29 Beisp: 1) Siehe oben: $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1$

$$2) \int_\alpha^\beta \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(\beta) - \arctan(\alpha)$$



$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \arctan(\beta) - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \lim_{\beta \rightarrow \infty} (\underbrace{\arctan(\beta)}_{\rightarrow \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\arctan(\alpha)}_{\rightarrow -\frac{\pi}{2}}) = \pi$$

$$3) \int \frac{1}{x^2+7x+10} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+5} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} (\ln|x+2| - \ln|x+5|) + C$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{|x+2|}{|x+5|} \right) + C$$

$\rightarrow 1$ für $x \rightarrow \infty$

$\rightarrow \ln(1) = 0$ für $x \rightarrow \infty$

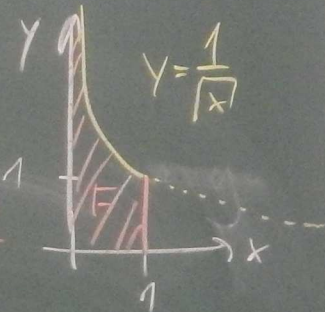
$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+7x+10} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \ln \left(\frac{\beta+2}{\beta+5} \right) - \frac{1}{3} \ln \frac{2}{5} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \ln \frac{2}{5}$$

$$= \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}$$

$$4) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_{x=0}^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} = 2$$

Korrekt: $\lim_{\alpha \downarrow 0} \left[2\sqrt{x} \right]_{x=\alpha}^1 = 2$



$$5) \int_0^{\infty} \sin(x) dx \text{ ist divergent.}$$

$$\int_0^{\beta} \sin(x) dx = \cos(0) - \cos(\beta) \text{ konv. nicht für } \beta \rightarrow \infty$$

$$\int_1^{\beta} \frac{1}{x^s} dx = \left[\frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_{x=1}^{\beta} = \frac{\beta^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \rightarrow \infty, s < 1$$

$$\rightarrow -\frac{1}{1-s}, s > 1$$

$$6) \int_1^{\beta} \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \left[\ln(x) \right]_{x=1}^{\beta} = \ln(\beta) \rightarrow \infty & s=1 \\ \frac{1}{s-1} & \text{falls } s > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1} & \text{falls } s > 1 \\ \text{divergent} & \text{falls } s \leq 1 \end{cases}$$

8.30 Vergleichskriterium für uneigentliche

Integrale: Sei $f: [a, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ lokal integrierbar
und $g: [a, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ sei uneigentlich integrierbar und g sei Majorante für f :

$$\forall x \in [a, \ell]: |f(x)| \leq g(x).$$

Dann ist f auch uneigentlich integrierbar.

Entsprechend für uneigentliche Integrale über $[a, \ell],]a, \ell[$.

Zum Beweis: $\left| \int_a^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_a^{\beta} g(x) dx \xrightarrow{\beta \downarrow a} 0$ $\square$

8.31 Beisp. 1) $\frac{x^\lambda}{1+x^2} = f(x)$ für $x \geq 0$

$$|f(x)| = f(x) \leq \frac{x^\lambda}{x^2} = x^{\lambda-2}$$

Für $2-\lambda > 1$: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{2-\lambda}} dx$ konv. $\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ konv.

Für $2-\lambda \leq 1$: $f(x) = \frac{x^\lambda}{1+x^2} \stackrel{x \geq 1}{\geq} \frac{x^\lambda}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} x^{\lambda-2}$

$$\Rightarrow \int_1^{\beta} f(x) dx \geq \frac{1}{2} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^{2-\lambda}} dx \rightarrow \infty \text{ (letztes Beisp. 6)}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ ist divergent.}$$

Für $\int_0^1 f(x) dx$: $|f(x)| = f(x) = \frac{x^\lambda}{1+x^2} \leq \frac{x^\lambda}{1+0} = x^\lambda$

Für $s \geq 0$: $\int_0^1 \frac{x^s}{1+x^2} dx$ exist, da f stetig

$$\begin{aligned} \text{Für } -1 < s < 0: \int_0^1 x^s dx &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \left[\frac{x^{s+1}}{s+1} \right]_{x=\alpha}^1 \\ &= \lim_{\alpha \downarrow 0} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{\alpha^{s+1}}{s+1} \right) = \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

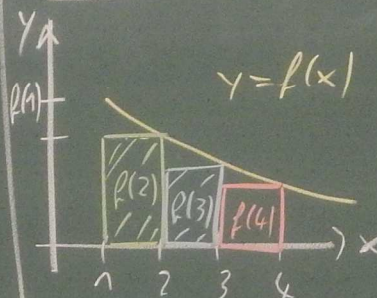
8.30 $\int_0^1 f(x) dx$ konv.

Als Übung: $\int_1^\infty f(x) dx$ div. falls $s \leq -1$
(benutze $f(x) \geq \frac{x^s}{2}$)

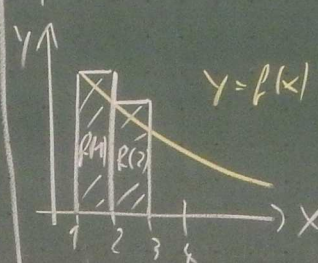
8.32 Integralkriterium für Reihen: Sei
 $f: [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ monoton fallend. Dann gilt

$$\int_1^\infty f(x) dx \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^\infty f(k) \text{ konvergent}$$

Beweis: 1) " $\Rightarrow$ "



2) " $\Leftarrow$ "



$$\text{Sätze} \Rightarrow \sum_{k=1}^m f(k) \leq \int_1^m f(x) dx \leq \int_1^\infty f(x) dx$$

$\Rightarrow S_m = \sum_{k=1}^m f(k)$ ist monoton wachsend und beschränkt

$\Rightarrow$ konvergent

$$\begin{aligned} \text{Sätze} \Rightarrow \int_1^\infty f(x) dx &\leq \sum_{k=1}^m f(k) \\ &= S_m \\ &\text{mon. wachsend und beschränkt} \\ &\Rightarrow \text{konvergent} \end{aligned}$$

□

8.33 Beisp: $f(x) = \frac{1}{x^s}$ mit $s > 0$, $x \in [1, \infty[$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0$$

f monoton fallend

$$8.32: \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx \text{ konv.} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \text{ konv.}$$

Früheres Beispiel:

$$\text{Für } s > 1: \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \text{ konv.}$$

$$\text{Für } 0 < s \leq 1: \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx \text{ div.} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \text{ div. für } 0 < s \leq 1$$

Nachtrag zu 8.31: $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$

$$\text{Für } x \geq 1: e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x}$$

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx \text{ konv.}$$

$$\Rightarrow \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \text{ int. konv.}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx \text{ int. konv.}$$

$x \mapsto e^{-x^2}$ ist eine gerade Funktion

$$\Rightarrow \int_{-\beta}^0 e^{-x^2} dx = \int_0^{\beta} e^{-x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx \text{ konv.} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \text{ konv.}$$

$= \sqrt{\pi}$ (kann gezeigt werden)

8.6 Parameterabhängige Integrale

8.34 Beisp: 1) $F(t) := \int_1^2 \sin(t \cdot x) dx$

$$= \int_1^2 \left[\frac{1}{t} \cos(tx) \right]_1^2 = -\frac{1}{t} (\cos(2t) - \cos(t)) \quad t \neq 0$$

$t = 0$

2) Für $t \neq 0$: $F(t) = \int_t^{1+t} e^x dx = e^{1+t} - e^t$

8.35 Satz: Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$, $\gamma(t) := \int_a^b f(t, x) dx$. Dann

$$\gamma'(t) = \int_a^b \partial_t f(t, x) dx,$$

d.h. Integral und Ableitung sind vertauschbar.

8.36 Folg: Seien $\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$,

$$\gamma(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, x) dx$$

Dann ist γ differenzierbar und

$$\gamma'(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \partial_t f(t, x) dx + \underbrace{f(t, \beta(t)) \beta'(t)}_{\text{}} - \underbrace{f(t, \alpha(t)) \alpha'(t)}_{\text{}}$$

Beweis: Definiere $F(u, v, w) := \int_u^v f(w, x) dx$

$$\partial_w F = f(w, v) \quad (\text{vgl. Hauptsatz})$$

$$\partial_u F = -f(w, u)$$

$$\partial_v F \stackrel{8.35}{=} \int_u^v \partial_v f(w, x) dx$$

$$\left[+ \partial_w F(\alpha(t), \beta(t), t) \cdot 1 \right]$$

$$\gamma(t) = F(\alpha(t), \beta(t), t)$$

Kettenregel $\gamma'(t) = \partial_u F(\alpha(t), \beta(t), t) \cdot \alpha'(t) + \partial_v F(\alpha(t), \beta(t), t) \cdot \beta'(t) + \partial_w F(\alpha(t), \beta(t), t) \cdot 1$