8.7 Einführung in die numerische Integration

Problem: $\int_a^b f(x)\,dx$ nicht explizit berechenbar, z.B. $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$, $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

1. Idee: Interpolation: Wähle Stützstellen $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$, berechne das Polynom P_n höchstens n-ten Grades mit $P_n(x_j)=f(x_j)$, $j=0,\dots,n$

hoffe $\underbrace{\int_a^b P_n}_{\text{berechenbar, da Polynom}} \approx \int_a^b f$.

8.33 Def: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$. Das Polynom P_n höchstens n-ten Grades mit der Eigenschaft $P(x_j)=f(x_j)$ für $j=0,1,\dots,n$ heißt **Interpolationspolynom** zu f und $\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$.

Existenz? Eindeutigkeit?

Ansatz: $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, bestimme $a_0,\dots,a_n$

$$P(x_j) = f(x_j) \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n} \underbrace{a_k}_{\text{gesucht}} \underbrace{x_j^k}_{\text{gegeben}} = \underbrace{f(x_j)}_{\text{gegeben}}, \; j=0,\dots,n$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \quad (*)$$

$(*)$ ist ein LGS mit n Unbekannten und n Zeilen

Identitätssatz 2.68 $\Rightarrow$ Lösung von $(*)$ eindeutig

Lineare Alg. $\Rightarrow$ A hat Höchstrang, $\det(A) \neq 0$

$\Rightarrow$ A ist invertierbar

$\Rightarrow$ Lösung $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$ existiert

8.39 Satz: Sei $f \in C^n([a,b] \to \mathbb{R})$ und P_n das Interpolationspol. zu f und $\{x_0, \dots, x_n\}$. Weiter sei $R_n(x) := f(x) - P_n(x)$. Dann gibt es zu jedem $x \in]a,b[$ ein $\xi_x \in]a,b[$, so dass

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n)}(\xi_x) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{a \leq \xi \leq b} |f^{(n)}(\xi)| \underbrace{\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|}_{=: \omega(x)} \quad (*)$$

8.40 Die große Enttäuschung z.B. $f:[-4,4]\to\mathbb{R}: x\mapsto \frac{1}{1+x^2}$

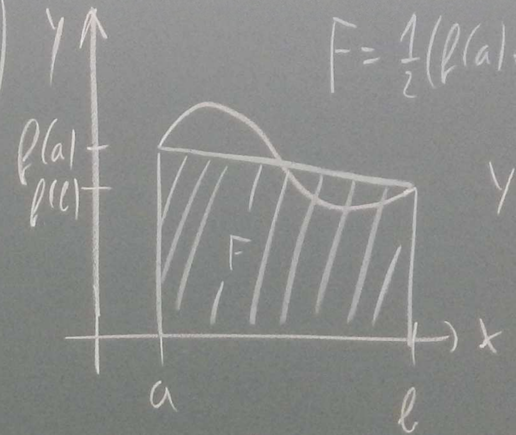
Mit wachsendem n wird die Approximation schlechter. Warum?

8.41 Bem: Man kann die Stützstellen geschickter wählen (nicht äquidistant), so dass $\omega(x)$ kleiner bleibt ($\to$ Tschebyscheff-Polynome)

$\Longrightarrow$ Beschränkung auf Polynome niedriger Ordnung.

Fall $n=1$:

$$F = \frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a)$$



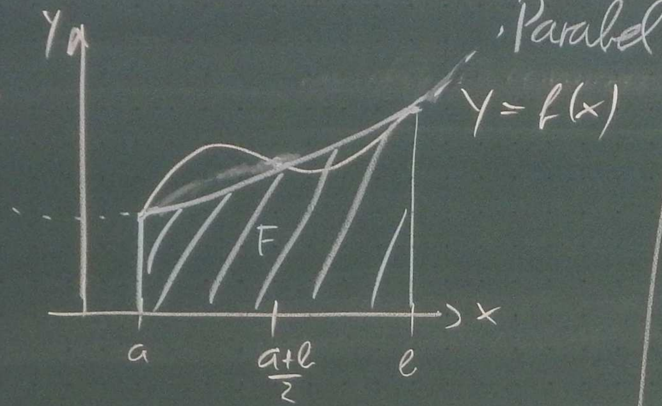
8.42 Satz: Sei $f \in C^2([a,b]\to\mathbb{R})$. Dann gilt die Trapezregel

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) + R,$$

$$|R| \le \frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\le\xi\le b}|f''(\xi)|$$

Beweis $|R| \overset{8.39}{\le} \frac{1}{2!}\max|f''(\xi)|\cdot\int_a^b |x-a|\cdot|x-b|\,dx$ $\square$

Fall $n=2$



2.43 Satz: Sei $f \in C^4([a,b] \to \mathbb{R})$. Dann gilt die Simpson-Formel (Keplersche Fassregel)

$$\int_a^b f = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R,$$

$$|R| \le \frac{(b-a)^5}{2880} \max_{a \le \xi \le b} |f^{(4)}(\xi)|$$

2. Idee: Summation: Unterteile $[a,b]$ in Teilintervalle $[a, a+h], [a+h, a+2h], \ldots, [b-h, b]$ mit $h = \frac{b-a}{\ell}$, $\ell \in \mathbb{N}$ und wende in jedem Teilintervall die Trapezregel an.

2.44 Satz: Sei $f \in C^2([a,b] \to \mathbb{R})$, $h = \frac{b-a}{\ell}$. Dann gilt die summierte Trapezregel

$$\int_a^b f = T(h) + R(h),$$

$$T(h) = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 2f(b-h) + f(b)\right)$$

$$|R(h)| \le (b-a)\frac{h^2}{12} \max_{a \le \xi \le b} |f''(\xi)|$$

8.45 Diskussion: 1) Der Fehler ist von Ordnung h^2.

2) Wählt man $h = \frac{b-a}{2^j}$, so kann man beim Übergang von j auf $j+1$ Rechenschritte sparen.

3) Man kann auch die Simpson-Formel summieren.

3 Idee: Romberg-Extrapolation (genau

Entwickle $R(h)$ mit dem Satz von Tayl

$$\int_a^b f = T(h) + c_1 h^2 + c_2 h^4 + \dots + \quad g(h)$$

mit beschränkter Fkt. $g(h)$

$$-\left(\int_a^b f = T(h) + c_1 h^2 + c_2 h^4 + \dots\right)$$

$$4\cdot\left(\int_a^b f = T\left(\frac{h}{2}\right) + c_1 \frac{h^2}{4} + c_2 \frac{h^4}{16} + \dots\right)$$

$$3\int_a^b f = 4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) + c_2 h^4\left(\frac{1}{16} - 1\right) + \dots$$

Dies ist bereits eine Formel der Ordnung h^4

Fortsetzung dieses Verfahrens: Romberg-Schema.

9. Gewöhnliche Differentialgleichungen

9.1 Beispiele

1)

Temperatur in Tasse zur Zeit t: $y(t)$

Ann: $Y_{außen} = \text{konst}$

Physiker: Verlauf von $y(t)$ ist bestimmt durch:

a) Anfangszustand: $y(0) = Y_0$ Anfangstemp.

b) Abfließen der Wärme: $\underbrace{y'(t)}_{\text{Änderung Temperatur}} = -\alpha \underbrace{\left(y(t) - Y_{außen}\right)}_{\text{abfließende Energie}}$

Mathematiker:

Zu b) Seien α, $Y_{außen}$ vorgegeben.

Die Differentialgleichung besitzt die Lösungen

$$y(t) = c e^{-\alpha t} + Y_{außen} \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$

Überprüfen durch Einsetzen:

Linke Seite: $y'(t) = c e^{-\alpha t} \cdot (-\alpha)$

Rechte Seite: $-\alpha\left(y(t) - Y_{außen}\right) = -\alpha c e^{-\alpha t}$

$\Rightarrow$ $y(t)$ erfüllt die Differentialgleichung, egal wie $c \in \mathbb{R}$ gewählt wurde

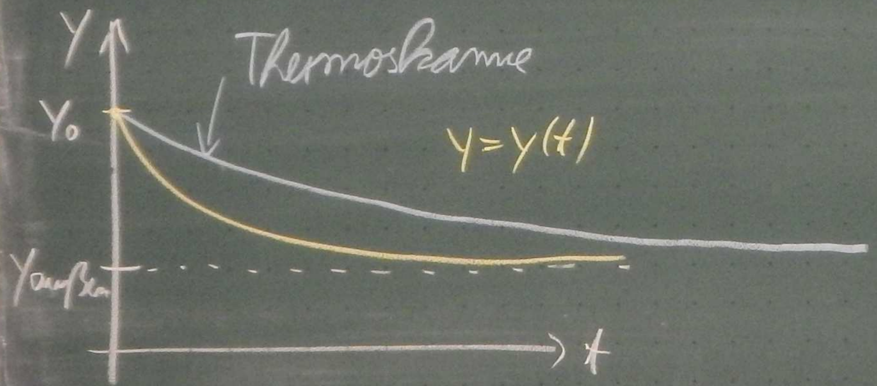
Zu a): $Y_0 \overset{!}{=} y(0) = Ce^{-\alpha \cdot 0} + Y_{außen}$

$\Rightarrow C = Y_0 - Y_{außen}$ ist eindeutig

Mathematik bestätigt die Physik:

Durch a) und b) ist $y(t)$ eindeutig bestimmt:

$$y(t) = (Y_0 - Y_{außen})\, e^{-\alpha t} + Y_{außen}$$



9.1 Beobachtung: Die Differentialgl. hat unendlich viele Lösungen, die Anfangsbedingung $y(0) = Y_0$ "wählt" die richtige Lösung aus.

2) Senkrechter Wurf nach oben (Stein)

Höhe des Steins über dem See zur Zeit t: $y(t)$

Physik: $y(t)$ ist bestimmt durch:

a) Startpunkt: $y(0) = h_0$ Höhe des Werfenden

b) Startgeschwindigkeit: $y'(t) = v_0$

c) Einwirkung der Erdanziehungskraft:

$$\underbrace{\cancel{m}\, y''(t)}_{\text{Trägheit}} = \underbrace{-\cancel{m} \cdot g}_{\text{Erdanziehungskraft}}$$

Mathematik:

Zu c): $y''(t) = -g = \text{konst.}$

$$\Rightarrow y'(t) = -gt + c$$

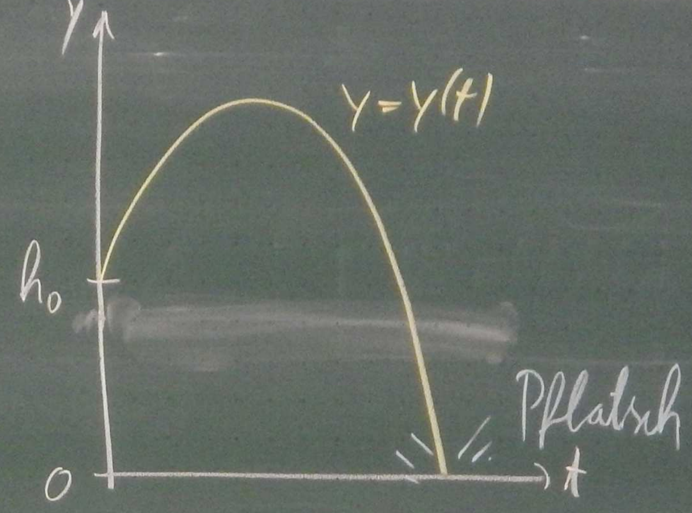
$$\Rightarrow y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + ct + d \;;\; c,d \in \mathbb{R}$$

Zu a): $h_0 \overset{!}{=} y(0) = d \Rightarrow d = h_0$

Zu b): $v_0 \overset{!}{=} y'(0) = c \Rightarrow c = v_0$

$\Rightarrow$ Eindeutige Lösung

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot t + h_0$$



9.2 Beobachtung: Die Differentialgleichung $y''(t) = -g$ besitzt unendlich viele Lösungen.

Die Anfangsbedingung $y(0) = h_0 \wedge y'(0) = v_0$ "wählt" die richtige Lösung aus.