9.3 Def: Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und J Intervall.

1) Die Gleichung

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad x \in J \qquad (*)$$

für die gesuchte Funktion y heißt (explizite) **Differentialgleichung** (Dgl) **n-ter Ordnung**. Eine n-Mal stetig diffbare Fkt. $y: J \to \mathbb{R}$, die $(*)$ erfüllt, heißt **Lösung**.

2) Seien $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in J$ gegeben. Die Bedingung

$$y(x_0) = y_0 \wedge y'(x_0) = y_1 \wedge \dots \wedge y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \qquad (**)$$

heißt **Anfangsbedingung** (n-ter Ordnung)

3) $(*) \wedge (**)$ heißt **Anfangswertproblem** (AWP) für die gesuchte Fkt. $y: J \to \mathbb{R}$.

9.4 Bem: 1) Die höchste auftretende Ableitung der gesuchten Fkt. ist $y^{(n)}$.

2) Die Dgl $(*)$ heißt **gewöhnlich**, da die Variable x eindimensional ist. Falls $x \in \mathbb{R}^n$ [illegible] partielle Differentialgleichung.

3) Kurzschreibweise: $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

4) Implizite Dgl: $(y''+x)^2 = y'$

5) Es gibt kein allgemeines Verfahren zur Lösung von Dgl en.

9.5 <u>Beisp</u>: 1) $\left.\begin{array}{l} y^{(4)} = (x+y)^2 \cdot y' - y'' \\ y(1)=0,\ y'(1)=1,\ y''(1)=2,\ y'''(1)=3 \end{array}\right\}$

ist AWP 4. Ordnung.

2) $y' = 2xy$, $y(0) = -1$

Lösung: $y(x) = -e^{x^2}$, denn

linke Seite $y' = -e^{x^2} \cdot 2x$

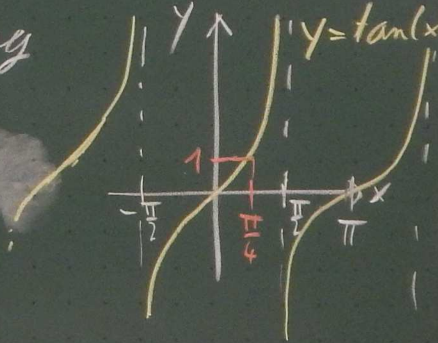
rechte Seite $2xy = -2xe^{x^2}$ $=$ | $y(0) = -e^0 = -1$

Beobachtung: Die Lösung ist auch für $x<0$, also links von der Stelle der Anfangsbed., definiert. Meist wird kein Intervall J angegeben, der Existenzbereich der Lösung ergibt sich bei Berechnung der Lösung. Die Lösung $y = -e^{x^2}$ ist Lösung für $J = \mathbb{R}$: y ist eine <u>globale</u> Lösung

3) $y' = 1 + y^2$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Lösung $y = \tan(x)$

für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



y ist eine lokale Lösung.

Probe: $y' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$$1+y^2 = 1+\tan^2(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = y'$$

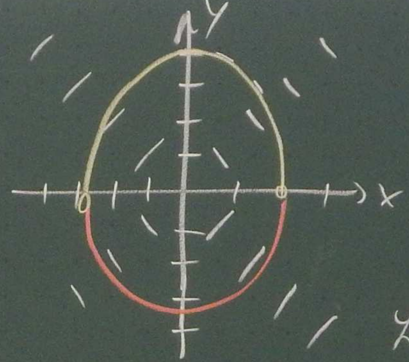
$$y(\tfrac{\pi}{4}) = \tan(\tfrac{\pi}{4}) = 1$$

4) $y' = 1+y^2$, $y(\pi) = 0$

Lösung $y = \tan(x)$ für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

96 Graphische Veranschaulichung:

Eine Lösung der Dgl. $y' = f(x,y)$ hat im Punkt (x_0,y_0) die Steigung $f(x_0,y_0)$. z.B. $y' = -\frac{x}{y}$.



Sieht aus, als ob

$y = \sqrt{r^2-x^2}$, $-r<x<r$

$y = -\sqrt{r^2-x^2}$, $-r<x<r$

Lösungen sein könnten

$$y' = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{r^2-x^2}}\cdot \cancel{2}x$$

$$= \quad \Rightarrow \text{Lösung}$$

$$-\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

9.2 Ein paar Lösungsmethoden

9.2.1 Nur integrieren:

$$y' = f(x) \quad , x \in [a,b]$$

Falls f stetig

$$y(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

Die Anfangsbedingung

$$y(a) = y_0$$

legt c eindeutig fest.

Entsprechend $y^{(n)} = f(x)$: n-Mal integrieren.

9.2.2 Trennung der Variablen

9.7 Def: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Dgl

$$y' = f(y) \cdot g(x)$$

heißt separierbare Dgl.

9.8 Bsp: 1) $y' = \underbrace{e^x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\sin(y)}_{f(y)}$

2) $y' = (x+y)^2$ nicht separierbar

3) $y' = \underbrace{(1+y^2)}_{f(y)} \cdot \underbrace{1}_{g(x)}$

9.9 Lösung durch Trennung der Variablen: Gesucht sind Lösungen der Dgl $y' = f(y) \cdot g(x)$ $(*)$

1) Für welche $\eta \in \mathbb{R}$ gilt $f(\eta) = 0$?

Denn $f(\eta) = 0 \Rightarrow y = \text{konst.} = \eta$ ist Lösung (spezielle Lösung)

2) Sei $y(x) \notin \{\eta : f(\eta) = 0\}$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{f(y(x))} y'(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int \frac{1}{f(y(x))} y'(x) dx}_{} = \underbrace{\int g(x) dx}_{= G(x) + C \text{ mit } G' = g}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Substitution} \\ u = y(x) \\ \frac{du}{dx} = y'(x)\end{array}} = \left[\int \frac{1}{f(u)} du\right]_{u = y(x)}$$

$$= H(y(x)) + C$$

mit $H'(u) = \frac{1}{f(u)}$ (Stammfkt.)

$\Leftrightarrow H(y(x)) = G(x) + C$

$H'(u) = \frac{1}{f(u)} \neq 0 \Rightarrow H$ ist streng mon. wachsend oder streng mon. fallend

$\Rightarrow H$ invertierbar

$$\Leftrightarrow y(x) = H^{-1}(G(x) + C)$$

Kochrezept zur Lösung der Dgl $y' = f(y) \cdot g(x)$:

I) Bestimme alle Nullst. von f: $f(\eta) = 0 \Rightarrow y = \eta$ ist Lös. (spezielle Lösungen.)

II) Für $y \notin \{\eta : f(\eta) = 0\}$: Schreibe $\frac{dy}{dx} = f(y) g(x)$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x) dx$$

Löse entstehende Gleichung nach y auf.

III) Allgemeine Lösung aus I und II

IV) Freie Konstante aus der Anfangsbedingung bestimmen.

9.10 Beisp: 1) $y' = \underbrace{(x^2-1)}_{g(x)}\underbrace{y^2}_{f(y)}, \; y(0)=1$

I) $f(y)=0 \Leftrightarrow y=0$: Eine konstante Lös. $y=0$

II) $y \neq 0$: $\frac{dy}{dx} = (x^2-1)\,y^2 \quad \Big| \cdot \frac{dx}{y^2} \;\int$ Merkregel

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int (x^2-1)\,dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^3}{3} - x + C$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{\frac{x^3}{3}-x+C} \quad \text{für } x^3-x+C \neq 0,\; C \in \mathbb{R}$$

III) Alle Lösungen: $y=0$

$$y = -\frac{1}{\frac{x^3}{3}-x+C}$$

IV) $y(0)=1$: $-\frac{1}{0+C} = 1 \Rightarrow C=-1$

$\Rightarrow$ Lösung $y(x) = -\frac{1}{\frac{x^3}{3}-x-1}$ für $x \in]a,b[$

mit $a<0<b$ und $\frac{x^3}{3}-x-1 \neq 0$ auf (a,b)

2) $y' = |y-1|^{1/2}$ $\quad f(y) = |y-1|^{1/2}, \; g(x)=1$

I) Nullstellen von f: $|y-1|^{1/2} = 0 \Leftrightarrow y=1$

$\Rightarrow$ Eine konstante Lös. $y=1$

II) $y \neq 1$.

Fall $y>1$: $\frac{dy}{dx} = |y-1|^{1/2} = (y-1)^{1/2} \quad \Big| \cdot \frac{dx}{(y-1)^{1/2}}, \int$

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{(y-1)^{1/2}} = \int 1\, dx$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2(y-1)^{1/2}}_{>0} = x+c \quad \text{für } x>-c,\ c\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y-1 = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \quad \text{"}$$

$$\Leftrightarrow y = 1+\left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \quad \text{"}$$

Fall $y<1$: $\int \frac{dy}{(1-y)^{1/2}} = \int 1\, dx$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-2(1-y)^{1/2}}_{<0} = x+c \quad \text{für } x<-c,\ c\in\mathbb{R}$$

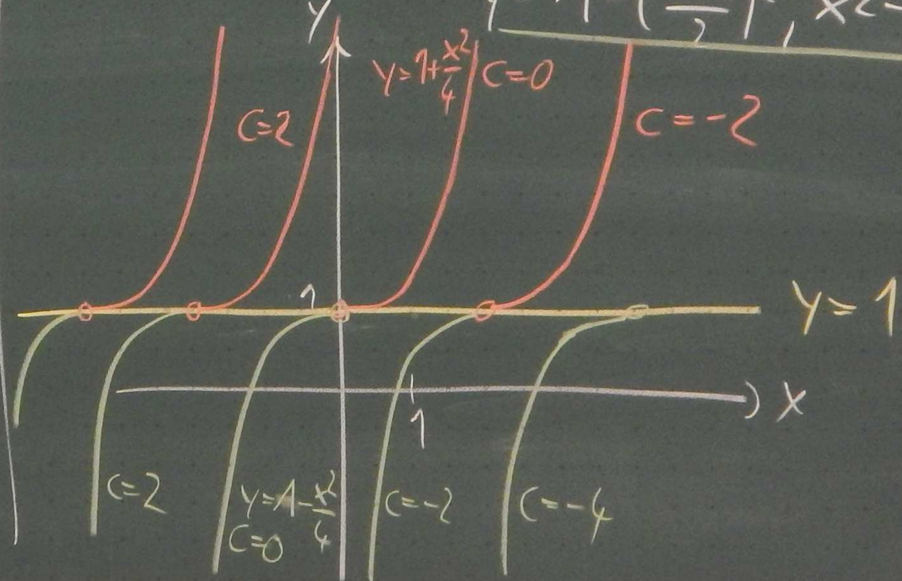
$$\Leftrightarrow 1-y = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \quad \text{für } x<-c$$

$$\Leftrightarrow y = 1-\left(\frac{x+c}{2}\right)^2 \quad \text{"}$$

III) Alle Lösungen: $y=1$

$y = 1+\left(\frac{x+c}{2}\right)^2,\ x>-c$

$y = 1-\left(\frac{x+c}{2}\right)^2,\ x<-c$



IV) Anfangsbedingung:

$y(x_0)=1$: $y=1$ ist Lösung des AWP

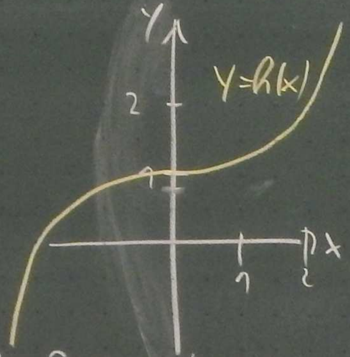
$y(2)=2$: $y=1+\frac{x^2}{4}$ für $x>0$ ist Lös. des AWP

$y(4)=2$: $y=1+\frac{(x-3)^2}{4}$ für $x>3$ " " " "

$y(2)=0$: $y=1-\frac{x^2}{4}$ für $x<0$ "

Achtung: Die Funktion

$$h(x)=\begin{cases}1+\frac{x^2}{4} & \text{für } x>0\\ 1-\frac{x^2}{4} & \text{für } x<0\end{cases}$$



$\Rightarrow h\in C^1(\mathbb{R}\to\mathbb{R})$, $y=h$ erfüllt die Dgl. und $y(2)=2$

Betrachtet man die Funktionen

$$h(x)=\begin{cases}1+\frac{x^2}{4} & \text{für } x>0\\ 1 & \text{für } -c\le x\le 0\\ 1-\left(\frac{x+c}{2}\right)^2 & \text{für } x<-c\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h\in C^1(\mathbb{R}\to\mathbb{R})\\ y=h \text{ erfüllt } y'=|1-y|^{1/2}\\ y=h \text{ erfüllt } y(2)=2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Das AWP $y'=|1-y|^{1/2}$, $y(2)=2$ besitzt unendlich viele Lösungen der Form $y(x)=h(x)$