Scheinklausur: V 53.01

Separierbare Dgl: $y' = f(y)\cdot g(x)$

9.2.2 Substitutionsmethode

Annahme: y ist Lösung der

Dgl $y' = f(x,y)$ (1)

Definiere $u(x) := \varphi(y(x),x)$ mit geeigneter Fkt. φ (z.B. $\varphi(y,x) = \frac{y}{x}$)

$$\Rightarrow u'(x) = \underbrace{\partial_1\varphi(y(x),x)\,y'(x) + \partial_2\varphi(y(x),x)\cdot 1}_{\text{eventuell kann dies als } g(x,u) \text{ geschrieben werden}}$$

$$\Rightarrow u' = g(x,u) \qquad (2)$$

Falls (2) lösbar ist, löse (2) und berechne y aus u.

Beispiel: $y' = 2x + x^3 e^y$ (nicht separierbar)

Setze $u(x) := y(x) - x^2$, also $\varphi(x,y) = y - x^2$

$$\Rightarrow u' = y' - 2x \overset{\text{Dgl.}}{=} \cancel{2x} + x^3 e^y - \cancel{2x} = x^3 e^{\underbrace{y-x^2}_{u}} e^{x^2}$$

$$\Rightarrow u' = \underbrace{x^3 e^{x^2}}_{g(x)} \cdot \underbrace{e^u}_{f(u)}$$

I) Nullstellen von f: e^u hat keine Nullst.

$\Rightarrow$ keine konstante Lös.

II) $$\frac{du}{dx} = x^3 e^{x^2} \cdot e^u$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int \frac{du}{e^u}} = \underbrace{\int x^3 e^{x^2}\,dx}$$

$$= -e^{-u} + c \qquad = \frac{1}{2}\int \underbrace{x^2}_{g}\, \underbrace{2x e^{x^2}}_{f'}\,dx$$

$$g' = 2x \qquad f = e^{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2}\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} - e^{x^2}\right) + C$$

$$\Leftrightarrow -e^{-u} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + c$$

$$\Leftrightarrow u = -\ln\left(\frac{1}{2}(1 - x^2)e^{x^2} + c\right)$$

Rücksubstitution: $y = u + x^2$ ....

9.2.3 Die Ähnlichkeitsdgl. $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Annahme: y ist Lös. von $y' = h\left(\frac{y}{x}\right)$

Setze $u(x) := \frac{y(x)}{x} = y(x) \cdot \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow u'(x) = y'(x) \cdot \frac{1}{x} - y(x)\frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x} h(u) - \frac{1}{x} \cdot u$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$$

$$\Rightarrow u' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \underbrace{\left(h(u)-u\right)}_{f(u)} \quad \text{separierbar}$$

Also Lösungsverfahren für $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:

- Setze $u(x) := \frac{y(x)}{x}$
- Löse die separierbare Dgl $u' = \frac{1}{x}\left(f(u)-1\right)$
- Rücksubstitution $y(x) = x \cdot u(x)$.

9.11 Beispiel: $y' = \frac{1}{4} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ nicht separierbar

$$u := \frac{y}{x} = \frac{1}{x} y \Rightarrow u' = -\frac{1}{x^2} y + \frac{1}{x} \cdot y'$$

$$\Rightarrow u' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \underbrace{\left(-u + \frac{1}{4} + u^2\right)}_{f(u) \,=\, \left(u-\frac{1}{2}\right)^2}$$

I) $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow u(x) = \frac{1}{2}$ ist einzige konst. Lös.

II) $u \neq \frac{1}{2}$: $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\left(u - \frac{1}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{u-\frac{1}{2}} = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - u = \frac{1}{\ln|x| + c} \quad \text{für } |x| \neq e^{-c}, 0$$

$$\Leftrightarrow u(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln|x| + c} \quad \text{für } |x| \neq e^{-c}, 0$$

III) Alle Lösungen:
$$\begin{cases} u(x) = \frac{1}{2} \\ u(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln|x| + c} \end{cases}$$

Rücksubstitution: $y = x \cdot u$

$$\Rightarrow y(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{\ln|x| + c} \quad \text{für } |x| \neq e^{-c},\ x \neq 0 \end{cases}$$

Für Anfangsbed. $y(1) = 1$

Die Lös. $y(x) = \frac{x}{2}$ scheidet aus

Berechnung von c:

$$1 \overset{!}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{c} \Leftrightarrow c = -2$$

$\Rightarrow$ Eindeutige Lösung

$$y(x) = \frac{x}{2} - \frac{x}{\ln|x| - 2} \quad \text{für } 0 < x < e^2$$

9.2.4 Die Dgl $y' = f(ax + by + c)$

Sei y Lös. von $y' = f(ax + by + c)$

Setze $u(x) := ax + by(x) + c$

$\Rightarrow u' = a + by' = a + bf(u)$ ist separierbar

Beispiel: $y' = (x - y + 3)^2$ nicht separierbar

Setze $u := x - y + 3$

$\Rightarrow u' = 1 - y' = 1 - (x - y + 3)^2$

$\Rightarrow u' = \underbrace{(1 - u^2)}_{f(u)} \cdot \underbrace{1}_{g(x)}$ separierbar

I) $f(u) = 0 \Leftrightarrow 1 - u^2 = 0 \Leftrightarrow u = \pm 1$

$\Rightarrow$ Zwei konstante Lösungen $u(x) = \pm 1$

II) $u \neq \pm 1$: $\frac{du}{dx} = 1 - u^2$

$\Leftrightarrow \int \underbrace{\frac{1}{1-u^2}}_{= \frac{-\frac{1}{2}}{u-1} + \frac{+\frac{1}{2}}{u+1}} du = \int 1 \, dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \ln|u-1| + \frac{1}{2} \ln|u+1| = x + c$

$\Leftrightarrow \ln \frac{|u+1|}{|u-1|} = 2x + 2c$

$\overset{e^{\cdot}}{\Leftrightarrow} \left|\frac{u+1}{u-1}\right| = e^{2x+2c} = e^{2x} e^{2c}$

$\Leftrightarrow \frac{u+1}{u-1} = \pm e^{2x} e^{2c} = d \cdot e^{2x}$, $d = \pm e^{2c} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Leftrightarrow u + 1 = d e^{2x} (u - 1)$

$\Leftrightarrow u(1 - d e^{2x}) = -1 - d e^{2x}$

$\Leftrightarrow u(x) = \frac{-1 - d e^{2x}}{1 - d e^{2x}}$ für $d e^{2x} \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq \ln \frac{1}{d}$

III) Alle Lösungen: $\begin{cases} u(x) = \pm 1 \\ u(x) = \frac{1 + d e^{2x}}{d e^{2x} - 1} & \text{mit } d \in \mathbb{R} \end{cases}$

(d = 0 liefert u = −1)

Rücksubstitution: $y(x) = x - u + 3$

$\Rightarrow$ Alle Lösungen $y(x) = \begin{cases} x - 2 \\ \cancel{x + 4} \leftarrow \text{im Fall } d = 0 \text{ enthalten} \\ x - \frac{1 + d e^{2x}}{d e^{2x} - 1} + 3, \; d \in \mathbb{R} \end{cases}$

Bem: Die Dgl $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ kann durch geeignete Subst. gelöst werden

9.3 Theorie

Drei Fragen: 1) Existiert eine Lös.

2) Ist die Lös. eindeutig

3) Hängt Lös "stetig" von Anfangswerten ab?

9.13 Hauptsatz über lokale Existenz:

Gegeben ist das AWP

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

und es gelte:

1) f ist stetig in einem Rechteck $[x_0-a, x_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]$ und $M := \max_R |f(x,y)| > 0$.

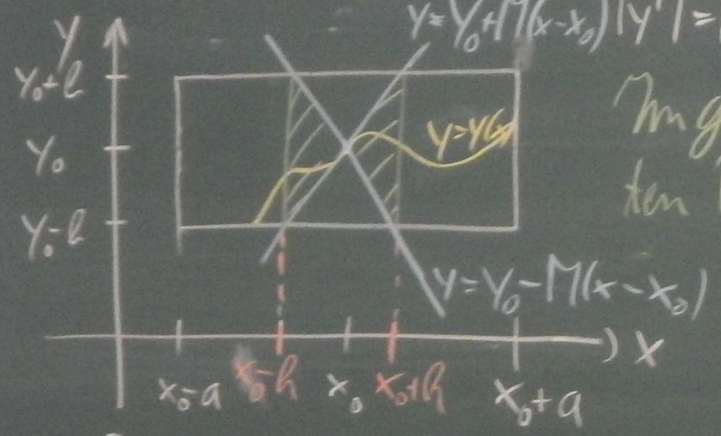
2) f genügt einer Lipschitz-Bedingung

$$\exists L > 0 \ \forall (x,y_1),(x,y_2) \in R: |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|$$

Dann besitzt das AWP eine eindeutige lokale Lös.

$$y: [x_0-h, x_0+h] \to \mathbb{R}, \quad h := \min\{a, \tfrac{b}{M}\}$$

Veranschaulichung: Ist y Lösung, so folgt $|y'| = |f(x,y(x))| \le M$



Im grün schraffierten Bereich verläuft die Lös.

Zum Beweis: Es gilt

$$y\in C^1([x_0-h,x_0+h]\to\mathbb{R}) \wedge y'=f(x,y)\wedge y(x_0)=y_0$$

$$\Leftrightarrow y\in C([x_0-h,x_0+h]\to\mathbb{R})\wedge y(x)=\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt+y_0$$

Integralgleichung ist besser zu behandeln

Definiere $\eta_0(x)=y_0$ (konstant)

$$\eta_n(x) := \int_{x_0}^{x} f(t,\eta_{n-1}(t))\,dt + y_0$$

Zeige $\eta_n\to y$.

9.14 Bem: Dies ist eine allg. Methode:

Zur Berechnung der Lös. von

$$y = F(y)$$

definiere $y_n := F(y_{n-1})$ und hoffe, dass $y_n\to y$ (vgl. Banachscher Fixpunktsatz)

9.15 Beisp: 1) $y' = -xy^2 = f(x,y)$

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |xy_1^2 - xy_2^2|$

$= \underbrace{|x|\,|y_1+y_2|}_{\le L \text{ für } (x,y_1),(x,y_2)\in \text{Rechteck}}\,|y_1-y_2|$

$\Rightarrow$ f erfüllt eine Lipschitz-Bed.

2) $y' = |y-1|^{1/2} = f(x,y)$

$$\frac{|f(x,y_1)-f(x,\overset{1}{\cancel{y_2}})|}{|y_1-\underset{1}{\cancel{y_2}}|} = \frac{\sqrt{|y_1-1|}}{|y_1-1|} \to \infty \text{ für } y_1 \to 1$$

D.h. f erfüllt keine Lipschitz-Bedingung

in jedem Rechteck, das mit der Geraden $y=1$ nichtleeren Schnitt besitzt.

Dies erklärt, warum das AWP $y' = |y-1|^{1/2}$, $y(x_0) = y_0$ Lösungen besitzt, die nicht eindeutig sind (vgl. 9.10, Bsp 2)

$u(x) = \dfrac{1+de^{2x}}{de^{2x}-1}$ mit $d\in\mathbb{R}$

(d=0 liefert $u=-1$)

...lution: $y(x) = x - u + 3$

...gen $y(x) = \begin{cases} x-2 \\ \cancel{x+4} \leftarrow \text{im Fall } d=0 \text{ enthalten} \\ x - \dfrac{1+de^{2x}}{de^{2x}-1} + 3, & d\in\mathbb{R} \end{cases}$