9.16 Bem: Typisch Mathematiker: Existenz und Eindeutigkeit, aber keine allg. Lösungsmethode.

9.17 Satz: Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ stetig mit

$$\exists L>0\ \forall (x,y_1),(x,y_2)\in\mathbb{R}^2: |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$$

(globale Lipschitz-Bedingung). Gilt

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

$$\tilde{y}'=f(x,\tilde{y}),\quad \tilde{y}(x_0)=\tilde{y}_0,$$

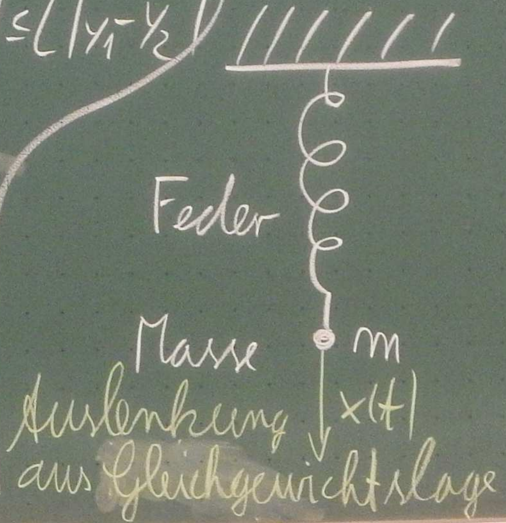
so folgt

$$|y(x)-\tilde{y}(x)|\le |y_0-\tilde{y}_0|\, e^{L|x-x_0|}$$

„Lösung hängt stetig vom Anfangswert ab!"

9.4 Systeme von Dglen

Beispiel: Federpendel



Physik: Bewegung bestimmt durch Auslenkung $x(t)$ und Geschwindigkeit $v(t)$ der Masse m

$x'(t) = v(t)\,,\quad x(0) = x_0$

$v'(t) = -x(t)\,,\quad v(0) = v_0$

Zwei unbekannte Fkten

Zwei Dgl en mit Anfangsbed.

Vektorschreibweise:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

oder mit $y(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$

$$y'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y(t)}_{f(t,\,y(t))}\,,\quad y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

<u>9.20 Def</u>: 1) Eine Abb. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt auch <u>Vektorfeld</u>.

2) Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq J \times D \to \mathbb{R}^n$ ein zeitabhängiges Vektorfeld (J = Intervall). Die Gl.

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{bzw.} \quad y' = f(t, y) \qquad (*)$$

für die unbekannte Fkt $y: J \to \mathbb{R}^n$ heißt <u>System von Dglen 1. Ordnung</u> oder <u>System 1. Ordnung</u>.

3) Sei $t_0 \in J$, $y_0 \in D$. Die Bedingung

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$y(t_0) = y_0 \qquad (**)$$

heißt **Anfangsbed.**

4) $(*) \wedge (**)$ heißt Anfangswertproblem AWP.

9.21 Picard-Lindelöf Sei $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \supseteq I \times D \to \mathbb{R}^n$

und $(t_0, y_0) \in I \times D$. Weiter soll gelten:

1) f ist stetig im Quader $R := [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$

(z.B. $\left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right] := [v_1, w_1] \times [v_2, w_2]$) und

$M := \max_R \|f(t,y)\| > 0$

2) f genügt in R einer Lipschitz-Bedingung

$$\|f(x,y_1) - f(x,y_2)\| \le L\|y_1 - y_2\|.$$

Dann besitzt das AWP $(*) \wedge (**)$ eine eindeutige lokale Lösung y.

9.5 Lineare Systeme

Im Folgenden: $I \subseteq \mathbb{R}$ bezeichnet ein Intervall.

9.22 Def: Sei $A: I \to \mathbb{R}^{n^2}$ eine Matrix mit zeitabhängigen Einträgen. Das System

$$y'(t) = A(t)\cdot y(t) + g(t) \quad \text{bzw.} \quad y' = A(t)\cdot y + g(t)$$

für $y: I \to \mathbb{R}^n$ heißt **lineares System**.

Ist $g = 0$, so heißt das System **homogen**, sonst **inhomogen**.

9.23 Beisp.: $y'(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \cdot y(t) + \underbrace{e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\neq 0}, \quad J =]0, \infty[$

für die Unbekannte $y: J \to \mathbb{R}^2$

Das System ist inhomogen

In Koordinatenschreibweise:

$$y_1'(t) = \frac{1}{t} y_1(t) + y_2(t) + e^t$$

$$y_2'(t) = \frac{1}{t} y_2(t) - 2e^t$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{in Dgl}} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ -2e^t \end{pmatrix}$$

9.24 Folgerung aus Picard-Lindelöf: Sind $A: J \to \mathbb{R}^{n^2}$ und $g: J \to \mathbb{R}^n$ stetig,* so besitzt das AWP

$$y' = A(t) \cdot y + g(t), \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige Lös. $y: J \to \mathbb{R}^n$

Insbesondere: Falls $J = \mathbb{R}$, existiert eine eindeutige globale Lös.

*($t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ vorausgesetzt)

9.5.1 Homogene Systeme

Für $A: J \to \mathbb{R}^{n^2}$ betrachte

$$y' = A(t) \cdot y \qquad (*)$$

9.25 Satz: 1) Sind $y_{[1]}, y_{[2]}$ Lösungen von (*) und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, dann ist auch

$y(t) := \alpha y_{[1]}(t) + \beta y_{[2]}(t)$ Lösung von $(*)$

2) Ist A stetig auf J, so bildet die Menge aller Lösungen

$$V := \{ y \in C^1(J \to \mathbb{R}^n) : y \text{ erfüllt } (*) \}$$

einen Vektorraum der Dimension n.
(n = Anzahl der Dglen in $(*)$)

Eine Basis $\{ y_{[1]}, \dots, y_{[n]} \}$ von V heißt <u>Fundamentalsystem</u> zu $(*)$.

<u>Beweis</u>: 1) $y'(t) = \alpha y_{[1]}'(t) + \beta y_{[2]}'(t)$

$= \alpha A(t) \cdot y_{[1]}(t) + \beta A(t) \cdot y_{[2]}(t)$

$= A(t) \cdot (\alpha y_{[1]}(t) + \beta y_{[2]}(t)) = A(t) \cdot y(t)$

2) Aus 1) $\Rightarrow$ V ist Vektorraum

Wähle $t_0 \in J$ fest. Sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig

9.24 $\Rightarrow$ eindeutige Lösung $y \in C^1(J \to \mathbb{R}^n)$ von

$$y' = A(t) \cdot y, \quad y(t_0) = y_0 \qquad (**)$$

Definiere eine Abb. $T_{t_0} : \mathbb{R}^n \to V$ durch

$$\mathbb{R}^n \ni y_0 \longmapsto y \in C^1(J \to \mathbb{R}^n) \text{ Lös von } (**)$$

Zeige: T_{t_0} ist <u>Vektorraum-Isomorphismus</u>,
d.h.: T_{t_0} ist linear und bijektiv

Lineare Algebra $\Rightarrow$ $\underbrace{\dim(\mathbb{R}^n)}_{=n} = \dim(V)$ $\square$

Bem: Was nützt das?

Um alle Lösen von (*) zu finden, reicht es, n linear unabhängige Lösungen zu finden:

$$\left.\begin{array}{l}\{y_{[1]},\dots,y_{[n]}\} \text{ lin. unabh.}\\ y_{[j]} \text{ Lös von } (*)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

9.25

$\Rightarrow \{y_{[1]},\dots,y_{[n]}\}$ ist Fundamentalsystem

$\Rightarrow$ Alle Lösungen von (*):

$$y(t)=\sum_{j=1}^{n} c_j\, y_{[j]}(t) \quad \text{mit } c_1,\dots,c_n\in\mathbb{R}$$

9.26 Beispiel: $y' = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot y = A\cdot y$

Lösungen: $y_{[1]}(t) = e^{t}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$y_{[2]}(t) = e^{3t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$y_{[3]}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

z.B. $y_{[3]}'(t) = -e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$A\cdot y_{[3]}(t) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\cdot e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix}0\\-1\\+1\end{pmatrix} = y_{[3]}'(t)$$

$\{y_{[1]}, y_{[2]}, y_{[3]}\}$ ist linear unabhängig:

Zeige: $\alpha_1 y_{[1]} + \alpha_2 y_{[2]} + \alpha_3 y_{[3]} = 0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

$$\alpha_1 e^t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 e^t + 0 + 0 = 0 & \Rightarrow \alpha_1 = 0 \\ 0 + \alpha_2 e^{3t} + \alpha_3 e^{-t} = 0 & \\ 0 + \alpha_2 e^{3t} - \alpha_3 e^{-t} = 0 & \Rightarrow \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$2\alpha_2 e^{3t} + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = \alpha_1 e^t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2 e^{3t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3 e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ sind alle Lös.en des Systems $y' = A \cdot y$.

9.27 Folg.: Seien $y_{[1]}, \dots, y_{[n]}$ Lösungen von $(*)$: $y' = A(t) \cdot y$. Dann

$\{y_{[1]}, \dots, y_{[n]}\}$ ist lin. unabh. in V

$\Leftrightarrow \{y_{[1]}(t_0), \dots, y_{[n]}(t_0)\}$ ist lin. unabh. im $\mathbb{R}^n$ für ein $t_0 \in J$

$\Leftrightarrow \{y_{[1]}(t), \dots, y_{[n]}(t)\}$ ist lin. unabh. im $\mathbb{R}^n$ für alle $t \in J$.

9.28 Folg.: Voraus. wie 9.27. Dann $\{y_{[1]}, \dots, y_{[n]}\}$ ist ein Fundamentalsystem für $(*)$

$(\Leftarrow)\ \exists t_0 \in J: \det\left(y_{[1]}(t_0), \dots, y_{[n]}(t_0)\right) \neq 0$

$(\Leftarrow)\ \forall t \in J: \underbrace{\det\left(y_{[1]}(t), \dots, y_{[n]}(t)\right)}_{=: W(t)} \neq 0$

$W(t)$ heißt Wronski-Determinante.

9.28 Beisp: 1) $y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & e^{-t} \\ 0 & e^{3t} & -e^{-t} \end{pmatrix} = e^{t}\begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{t}\left(-2e^{2t}\right) \neq 0$$

2) $y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} y$

Behaupt: $\left\{ y_{[1]}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix},\ y_{[2]}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

ist Fundamentalsystem.

$$\left.\begin{array}{l} W(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t \\ t & 0 \end{vmatrix} = -t^2 \neq \text{ auf } J =]0,\infty[\\ \text{Nachrechnen } y_{[1]}, y_{[2]} \text{ sind Lösn.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem