9.5.2 Inhomogene Systeme

Für $A : J \to \mathbb{R}^{(n^2)}$, $g : J \to \mathbb{R}^n$ betrachte das inhomogene System

$$y' = A(t) \cdot y + g(t) \qquad (**)$$

für die Unbekannte $y : J \to \mathbb{R}^n$.

9.30 Satz: 1) Sei $y_{[1]}$ eine Lös. von $(**)$.
Für $y_{[2]} \in C^1(J \to \mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:
(i) $y_{[2]}$ ist Lös von $(**)$
(ii) $y := y_{[1]} - y_{[2]}$ ist Lös. des zugehörigen homogenen Systems

$$y' = A(t) \cdot y \qquad (*)$$

2) Ist $y_{[1]}$ eine Lös. von $(**)$, (sogenannte partikuläre Lösung), so ist der affine Raum $\tilde{V}$ aller Lös.en von $(**)$ gegeben durch

$$\tilde{V} := y_{[1]} + V = \{y_{[1]} + y : y' = A(t) \cdot y\}$$

Beweis: 1) (i) $\Rightarrow$ (ii): $y' = y_{[1]}' - y_{[2]}'$

$$\overset{(**)}{=} A(t)\cdot y_{[1]} + \cancel{g(t)} - \left(A(t)\cdot y_{[2]} + \cancel{g(t)}\right)$$

$$= A(t)\cdot\left(y_{[1]} - y_{[2]}\right) = A(t)\cdot y$$

$\Rightarrow$ (ii)

(ii) $\Rightarrow$ (i): $y_{[2]} = y_{[1]} - y$

$$\Rightarrow y_{[2]}' = \underbrace{y_{[1]}'}_{} - \underbrace{y'}_{}$$

$$\overset{(*),(**)}{=} A(t)\cdot y_{[1]} + g(t) - A(t)\cdot y$$

$$= A(t)\cdot\big(\underbrace{y_{[1]} - y}_{= y_{[2]}}\big) + g(t)$$

$\Rightarrow$ (i)

2) Folgt unmittelbar aus 1) $\square$

9.31 Variation der Konstanten: Sei $\{y_{[1]}, \ldots, y_{[n]}\}$ ein Fundamentalsystem zu $(*)$ und

$$y := c_1(t)\cdot y_{[1]} + c_2(t)\cdot y_{[2]} + \ldots + c_n(t)\cdot y_{[n]}$$

Dann sind äquivalent:

(i) y ist Lös. von $(**)$

(ii) $c' = \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$ ist eindeutige Lös. des LGS

$$\underbrace{\left(y_{[1]}(t)\ y_{[2]}(t)\ \ldots\ y_{[n]}(t)\right)}_{n\times n\text{-Matrix mit Höchstrang für jedes } t\in I} \cdot c'(t) = g(t)$$

$\Rightarrow$ invertierbar

9.32 Bem: Var. d. Konst. funktioniert genauso im Fall $n=1$ (kein System, nur 1 Dgl.)

9.33 Beispiele: 1) $y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t \end{pmatrix}, \quad t>0 \quad (*)$

a) Zugehöriges homogenes System:

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} \cdot y \qquad (H)$$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} y_1' = \frac{1}{t} y_1 + y_2 & (1) \\ y_2' = \underbrace{\frac{1}{t}}_{g(t)} \underbrace{y_2}_{f(y_2)} & (2) \end{cases}$$

(2) ist separierbar: $y' = \frac{1}{t} \cdot \underbrace{y}_{f(y)}$

I) Konstante Lös.: $f(y) = 0 \iff y = 0$

$\Rightarrow$ Eine konst. Lös. $y(t) = 0$

II) $y \neq 0$: $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} \cdot y$

$$\iff \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{t}\, dt$$

$$\iff \ln|y| = \ln|t| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\overset{e}{\iff} |y| = e^{\ln|t|} \cdot e^c = |t| \cdot e^c$$

$$\iff y = \pm t \cdot e^c = d \cdot t, \quad d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

III Allg. Lös. $y(t) = d\, t, \quad d \in \mathbb{R}$

($d = 0$ siehe I)

$\Rightarrow$ Alle Lös.en von (2):

$$y_2(t) = d\cdot t \ , \ d\in\mathbb{R}$$

Einsetzen in (1):

$$y_1' = \frac{1}{t} y_1 + d\cdot t$$

Lös $y' = \underbrace{\frac{1}{t} y}_{A(t)\cdot y} + \underbrace{d\cdot t}_{g(t)}$, $n=1$ (3)

Zugehörige homogene Dgl:

$$y' = \frac{1}{t}\cdot y \qquad (4)$$

siehe oben

$\Rightarrow$ $y(t) = c\cdot t$, $c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem: $\{ t \}$ zu (4)

Variation der Konstanten: Ansatz $y(t) = c(t)\cdot t$

Eingesetzt in (3): $c'\cdot t + \cancel{c\cdot 1} = \cancel{\frac{1}{t}\underbrace{c\cdot t}_{y}} + d\cdot t$

$$\Leftrightarrow c' = d$$

Wähle $c = d\cdot t$

$\Rightarrow$ partikuläre Lös: $y_{part} = d\cdot t^2$

$\Rightarrow$ Allg. Lös. von (3): $y(t) = \underbrace{d\cdot t^2}_{\text{part. Lös}} + \underbrace{c\cdot t}_{\text{Lös.en der hom. Dgl (4)}}$

$\Rightarrow$ Allg. Lös von (1):

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dt^2 + ct \\ dt \end{pmatrix} = d\cdot\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \ d, c\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem zu (H):

$$\left\{ y_{[1]}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix},\ y_{[2]}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Lineare Unabhängigkeit mit Wronski-Det:

$$W(t) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}}_{\text{siehe unten}} = -t^2 \neq 0 \text{ für } t \in J =]0,\infty[.$$

b) Partikuläre Lös von (J): Variation der Konstanten:

$$y = c_1(t)\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c_2(t)\cdot\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist Lös von (J)}$$

$$\overset{\text{Satz 9.31}}{\Leftrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} t^2 c_1' + t c_2' & = 2t^2 \\ t c_1' & = 3t \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow c_1' = 3 \wedge c_2' = -t$$

Wähle $c_1 = 3t$, $c_2 = -\frac{t^2}{2}$

$\Rightarrow$ Partikuläre Lös: Setze c_1, c_2 in Ansatz ein

$$y_{part} = 3t\cdot\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} - \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Alle Lösungen von (J):

$$y = y_{part} + y_{hom} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c\cdot\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$c, d \in \mathbb{R}$

2) $$y' = \underbrace{(\sin(x))\cdot y}_{A(x)\cdot y} + \underbrace{x e^{-\cos(x)}}_{g(x)} \qquad (*) \qquad n=1$$

a) Löse hom Dgl

$$y' = (\sin(x))\cdot \underbrace{y}_{f(y)} \qquad (H)$$

Separation der Var

I) Konstante Lös: $y(x)=0$

II) $y\neq 0$: $\frac{dy}{dx} = \sin(x)\cdot y$

$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \sin(x)\,dx$

$\Leftrightarrow \ln|y| = -\cos(x)+c, \quad c\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow |y| = e^{-\cos(x)}\cdot e^{c}$

$\Leftrightarrow y(x) = \pm e^{-\cos(x)}\cdot e^{c} = d\cdot e^{-\cos(x)}, \quad d\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

III) Allg. Lös: $y(x) = d e^{-\cos(x)}, \quad d\in\mathbb{R}$ ($d=0$ siehe I)

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem von (H): $\{e^{-\cos(x)}\}$

b) Partikuläre Lös mit Var. der Konst:

Ansatz $\underline{y = c(x)e^{-\cos(x)}}$

Einsetzen in $(*)$:

$$c'(x)e^{-\cos(x)} + \cancel{c(x)e^{-\cos(x)}\cdot\sin(x)} = \cancel{\sin(x)c(x)e^{-\cos(x)}} + x e^{-\cos(x)}$$

$\Leftrightarrow c' = x$

Wähle $\underline{c(x) = \frac{x^2}{2}}$ $\Rightarrow$ $\underline{y_{part}(x) = \frac{x^2}{2}\cdot e^{-\cos(x)}}$

$\Rightarrow$ Alle Lösungen von (7):

$$y(x) = \frac{x^2}{2} e^{-\cos(x)} + d e^{-\cos(x)}, \quad d \in \mathbb{R}$$

9.6 Lineare Systeme mit konst. Koeff.

9.34 Satz: A sei reelle konstante $n \times n$-Matrix und $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Das AWP

$$y' = A \cdot y, \quad y(0) = y_0$$

besitzt die eindeutige globale Lös.

$$y(t) = e^{tA} \cdot y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (t \cdot A)^k \cdot y_0$$

9.35 Fundamentalsystem: A sei reelle konstante $n \times n$-Matrix. Ist $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin. unabh., so bildet

$$\{e^{t \cdot A} \cdot v_1, e^{t \cdot A} \cdot v_2, \dots, e^{t \cdot A} \cdot v_n\}$$

ein Fundamentalsystem für $y' = A \cdot y$.

Beweis: 1) $y(t) = e^{t \cdot A} \cdot v_k$ ist Lösung von $y' = A \cdot y$, vgl. letzter Satz

2) Wronski-Det. für $t = 0$:

$W(0) = \det(v_0 \; v_1 \dots v_n) \neq 0$ da $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabh. $\square$

936 Satz: A sei reelle konst. $n\times n$-Matrix

1) Ist $v \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor von A zum EW λ, so gilt

$$e^{t\cdot A}\cdot v = e^{\lambda t}\cdot v$$

2) Ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis aus reellen Eigenvektoren von A mit EWen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so ist

$$\{e^{\lambda_1 t}\cdot v_1,\ e^{\lambda_2 t}\cdot v_2,\ \dots,\ e^{\lambda_n t}\cdot v_n\}$$

ein Fundamentalsystem zu $y' = A\cdot y$

937 Beisp: $y' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix} y = A\cdot y$

a) EWe: $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 6 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$\underset{\text{nach 2. Zeile}}{\overset{\text{Entwickeln}}{=}} (1-\lambda)\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 6 \\ 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left((2+\lambda)^2 - 36\right)$

$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = -8$

b) Eigenvektoren: $\lambda_2 = 4$: $\begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1$: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\lambda_3 = -8$: $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) Fundamentalsystem: $\left\{ e^{t}\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e^{4t}\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ e^{-8t}\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

d) Allg. Lös: $y(t) = c_1 e^{t}\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t}\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-8t}\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$