9.38 Komplexe EWe: A sei reelle konstante Matrix. Betrachte das System $y' = A\cdot y$ für die Unbekannte $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

1) Ist $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$ eine Basis aus EVen von A mit zugehörigen EWen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, dann bildet

$$\{e^{\lambda_1 t}\cdot v_1, \dots, e^{\lambda_n t}\cdot v_n\}$$

ein (komplexes) Fundamentalsystem.

2) Ist $v \in \mathbb{C}^n$, so definieren

$$y(t) := \mathrm{Re}(e^{t\cdot A}\cdot v)$$

$$y(t) := \mathrm{Im}(e^{t\cdot A}\cdot v)$$

reelle Lösungen von $y' = A\cdot y$.

Insbesondere: $A\cdot v = \lambda\cdot v$, λ komplex

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(e^{\lambda t}\cdot v),\ \mathrm{Im}(e^{\lambda t}\cdot v)$$

sind Lös.en von $y' = A\cdot y$.

9.39 Beisp.: $y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot y = A\cdot y$

EWe: $p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E_3)$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda - 4$$

$p(\lambda) = 0 \iff \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1+i,\ \lambda_3 = 1-i$

EVen: $\lambda_1 = -2$: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1+i$: $v_2 = \begin{pmatrix} 2-2i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_3 = 1-i,\ v_3 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Fundamentalsystem $\left\{ e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 2-2i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix},\ e^{(1-i)t} \cdot \begin{pmatrix} 2+2i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathrm{Re}\left(e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} 2-2i \\ 2 \\ 1+i \end{pmatrix} \right) = \cancel{\mathrm{Re}\left(e^{t} \cdot \left(2\cos(t) + 2\sin(t) \right.\right.}$$

$= e^t \cdot e^{it} = e^t(\cos t + i \sin t)$

$$= \mathrm{Re}\left(e^t \cdot \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 2\sin(t) + 2i\sin(t) - 2i\cos(t) \\ 2\cos(t) + 2i\sin(t) \\ \cos(t) - \sin(t) + i\sin(t) + i\cos(t) \end{pmatrix} \right)$$

$$= e^t \cdot \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix}$$

Genauso Im( )

$\Rightarrow$ reelles Fundamentalsystem

$$\left\{ e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\; e^{t}\cdot\left(\cos(t)\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\sin(t)\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}\right),\right.$$

$$\left. e^{t}\left(\cos(t)\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\sin(t)\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}\right) \right\}$$

<u>9.40 Satz</u>: A sei nicht diagonalisierbare reelle $n\times n$-Matrix, und $\{v_1,\dots,v_k\}$ sei eine Vektorkette zum EW λ, d.h.

$$A\cdot v_1=\lambda\cdot v_1 \;\wedge\; A\cdot v_j=\lambda\cdot v_j+v_{j-1} \text{ für } j=2,\dots,k$$

(vgl. Jordansche Normalform). Dann besitzt das System $Y'=A\cdot Y$ folgende Lösungen:

$$e^{t\cdot A}\cdot v_1=e^{\lambda t}\cdot v_1$$

$$e^{t\cdot A}\cdot v_2=e^{\lambda t}\cdot(v_2+t\cdot v_1)$$

$$\vdots$$

$$e^{t\cdot A}v_k=e^{\lambda t}\cdot\sum_{j=0}^{k-1}\frac{t^j}{j!}\cdot v_{k-j}$$

<u>9.41 Bem</u>: Wichtig für uns: Es treten als Lösungen Funktion der Form $t^j\cdot e^{\lambda t}$ auf.

§7 Dglen höherer Ordnung

§42 Beisp: $y''' = 2y'' + y' - 2y \quad (*)$

Geniale Idee: Definiere $u(t) := \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u'(t) = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ 2y'' + y' - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ 2u_3 + u_2 - 2u_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} \cdot u \qquad (**)$$

Kann ich lösen!

EWe von A: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2$

EVen von A: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Allg. Lös. von $(**)$:

$$u(t) = c_1 e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

Setze $y(t) := u_1(t)$:

$$= c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Behauptung: y löst $(*)$:

$$y' = u_1' \overset{(**)}{=} u_2$$

$$\Rightarrow y'' = u_2' \overset{(**)}{=} u_3$$

$$\Rightarrow y''' = u_3' \overset{(**)}{=} 2u_3 + u_2 - 2u_1$$

$$= 2y'' + y' - 2y$$

9.43 Allgemein: Gegeben AWP

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{array}\right\} (*)$$

Setze $u(x) := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$, $F(x, u) := \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \\ f(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u' = F(x, u) \ \wedge\ u'(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (**)$$

Dann gelten:

y Lös. von $(*)$ $\Rightarrow$ u Lös. von $(**)$

u Lös. von $(**)$ $\overset{y := u_1}{\Rightarrow}$ y Lös. von $(*)$

9.8 Lineare Dgl en höherer Ordnung

9.44 Def: Seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, g \in C(I \to \mathbb{R})$.

Die Dgl

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \quad (1)$$

heißt lineare Dgl. n-ter Ordnung.

Ist $g(x) = 0$ für $x \in I$, so heißt die Dgl homogen, sonst inhomogen.

9.45 Bem: 1) Die Abb.

$$y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y$$

ist linear.

2) Definiert man wie vorher

$$u(x) := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \text{ so folgt}$$

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \cdots & & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix} \cdot u + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix} \quad (2)$$

D.h. u ist Lösung eines linearen Systems. Beachte: $y = u_1$ ist Lös. von (1)

9.46 Hom. Dglen: 1) Die Menge aller Lös.en

$$V := \{ y \in C^n(J \to \mathbb{R}) : y \text{ löst (1) mit } g = 0 \}$$

bildet einen Vektorraum der Dimension n.

Eine Basis von V heißt Fundamentalsystem.

2) n Lösungen $\{ y_{[1]}, y_{[2]}, \dots, y_{[n]} \}$ von (1) mit $g = 0$ bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn

$$\exists x \in J : W(x) := \det \begin{pmatrix} y_{[1]}(x) & y_{[2]}(x) & \cdots & y_{[n]}(x) \\ y'_{[1]}(x) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ y^{(n-1)}_{[1]}(x) & \cdots & & y^{(n-1)}_{[n]}(x) \end{pmatrix}$$

(Wronskideterminante). In diesem Fall gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in J$.

9.47 Inhom. Dglen: 1) Sei V der Lösungsraum der zu (1) gehörenden homogen Dgl. und y_{part} eine (sogenannte partikuläre) Lös. der inhom. Dgl (1). Dann ist

$$\tilde{V} := y_{part} + V$$

der affine Raum aller Lösen von (1).

2) Variation der Konstanten: Ist $\{y_{[1]}, \dots, y_{[n]}\}$ ein Fundamentalsystem (also Basis von V), so ist

$$y(x) := c_1(x)\, y_{[1]}(x) + \dots + c_n(x)\, y_{[n]}(x)$$

genau dann eine Lös. von (1), wenn

$$\begin{pmatrix} y_{[1]}(x) & y_{[2]}(x) & \dots & y_{[n]}(x) \\ y'_{[1]}(x) & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ y^{(n-1)}_{[1]}(x) & & & y^{(n-1)}_{[n]}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}$$

(Damit werden $c_1(x), \dots, c_n(x)$ berechnet).

9.48 Beisp. $y''' \underbrace{-2}_{=a_2} y'' \underbrace{-}_{=a_1} y' + \underbrace{2}_{a_0} y = \underbrace{e^x}_{=g(x)}$

Allgemeine Lös der zugehörigen hom. Dgl.

$$y''' - 2y'' - y' + y = 0$$

9.42: $y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$

Damit ist $\{e^x, e^{-x}, e^{2x}\}$ ein Fundamentalsystem, denn

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{pmatrix} \begin{matrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{matrix}$$

$$= -4e^{2x} + 2e^{2x} + e^{2x} - (-e^{2x} + 2e^{2x} + 4e^{2x})$$

$$= -6e^{2x} \neq 0$$

Partikuläre Lösung: $y(x) = c_1(x)e^{x} + c_2(x)e^{-x} + c_3(x)e^{2x}$

ist Lös. der inhom Dgl, wenn

$$\begin{pmatrix} e^x & e^{-x} & e^{2x} \\ e^x & -e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^x & e^{-x} & 4e^{2x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix} \quad |\cdot(-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} e^x & e^{-x} & e^{2x} & 0 \\ 0 & -2e^{-x} & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 3e^{2x} & e^x \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow c_3' = \frac{1}{3}e^{-x}, \quad c_2' = \frac{1}{6}e^{2x}, \quad c_1' = -\frac{1}{2}$$

Wähle $c_3 = -\frac{1}{3}e^{-x}$, $c_2 = \frac{1}{12}e^{2x}$, $c_1 = -\frac{1}{2}x$

$$\Rightarrow y_{part}(x) = -\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{12}e^{x} - \frac{1}{3}e^{x}$$

Lösung der hom Dgl → weglassen

Sei V der Lö-
gehörenden
y_{part} eine
(...e) Lös. der
ist

Lösen von (1).

$\Rightarrow$ Wähle $y_{part}(x) = -\frac{1}{2} x e^x$

$\Rightarrow$ Allg. Lös. der inhom. Dgl

$$y(x) = -\frac{1}{2} x e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x},$$

$$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

bzw. $\tilde{V} = -\frac{1}{2} x e^x + V$

$y''' - 2y$

9.42: $y(x) =$

Damit ist

mentalsy

$W(x) = \det$

$= -4e^{2x} +$

$= -6e^{2x} +$