$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

9.49 Bem: Für hom. Dglen der Ordnung $n \geq 2$ gilt es das Prinzip

<u>Reduktion der Ordnung</u>: Ist $y_{[1]}$ eine Lös. der hom Dgl., so führt der Ansatz $y = c(x) \cdot y_{[1]}$ eingesetzt auf eine Dgl. der Ordnung $n-1$ für c'. Damit kann aus $y_{[1]}$ eine lin unabh. Lös $y_{[2]}$ der hom. Dgl. konstruiert werden.

9.50 Beisp: $y'' - \underbrace{\frac{5}{x}}_{a_1(x)} y' + \underbrace{9\frac{y}{x^2}}_{a_0(x)} = x^2$ für $x > 0$.

1) Homogene Dgl: $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = 0$

a) Durch Raten: $y_{[1]}(x) = x^3$ ist Lösung:

$$y_{[1]}' = 3x^2, \quad y_{[1]}'' = 6x$$

$$\Rightarrow y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{9}{x^2}y = 6x - \frac{5}{x}3x^2 + \frac{9}{x^2}x^3 = 0$$

b) Reduktion der Ordnung: $y = c(x) \cdot x^3$

$\Rightarrow y' = c' \cdot x^3 + c \cdot 3x^2$

$y'' = c'' \cdot x^3 + 2c' 3x^2 + c \cdot 6x$

In hom. Dgl:

$c''x^3 + 6c'x^2 + 6cx - \frac{5}{x}(c'x^3 + c3x^2)$

$+ \frac{9}{x^2} \cdot cx^3 = 0$

$\Leftrightarrow c''x^3 + c'(6x^2 - 5x^2) +$

$+ c\underbrace{(6x - 15x + 9x)}_{=0} = 0$

$\Leftrightarrow c''x^3 + c'x^2 = 0$

Substituiere $u := c'$ $\Rightarrow u' = -\frac{1}{x}u$, $x > 0$

Allg. Lös: $u(x) = \frac{d}{x}$, $d \in \mathbb{R}$ (vgl. 9.33)

Rücksubst: $c' = u = \frac{d}{x}$

$\Rightarrow c = d \ln\underbrace{(x)}_{\text{da } x>0} + \gamma$, $d, \gamma \in \mathbb{R}$

Wähle $c(x) = \ln(x)$ (ein $c(x) \neq$ konst reicht)

$\Rightarrow y(x) = x^3 \ln(x)$ ist Lösung

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem:

$\{y_{[1]}(x) = x^3, y_{[2]}(x) = x^3 \ln(x)\}$

2) Inhom. Dgl: Var. der Konstanten

$$y = c_1(x)\, x^3 + c_2(x)\, x^3 \ln(x)$$

wobei

$$\begin{pmatrix} x^3 & x^3 \ln(x) \\ 3x^2 & 3x^2 \ln(x) + x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} \;\Big|\left(-\frac{3}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 c_1' + x^3 \ln(x) \cdot c_2' = 0 \\ \qquad\qquad x^2 \cdot c_2' = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c_2' = 1, \quad c_1' = -\ln(x)$$

Wähle $c_2(x) = x$, $c_1(x) = -x \ln(x) + x$

$$\Rightarrow y(x) = \underbrace{(-x\ln(x) + x)}_{c_1(x)} \underbrace{x^3}_{y_{[1]}(x)} + \underbrace{x}_{c_2(x)} \cdot \underbrace{x^3 \ln(x)}_{y_{[2]}(x)} = x^4$$

$$\Rightarrow y_{part}(x) = x^4$$

Allg. Lös: $y(x) = x^4 + c\, x^3 + d\, x^3 \ln(x)$, $c, d \in \mathbb{R}$

9.9 Lineare Dglen mit konst. Koeff.

Für $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ betrachte die Dgl

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

Für $u := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ folgt

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{A} \cdot u \qquad (**)$$

Umgekehrt: Ist u Lös. von $(**)$ und $y(x) := u_1(x) \Rightarrow y$ löst $(*)$

Wir wissen: $(**)$ hat Lös. in der Form

$u(t) = e^{\lambda t} \cdot v$, $u(t) = t^k e^{\lambda t} \cdot v$

$\Rightarrow \underbrace{y(x) = e^{\lambda x} \cdot c}$, $y(x) = x^k e^{\lambda x} \cdot c$

Zunächst betrachte diesen Typ

Also Ansatz zur Lös. von $(*)$:

$$y(x) = e^{\lambda x} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

eingesetzt in $(*)$:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + \lambda^{n-1} a_{n-1} e^{\lambda x} + \ldots + \lambda a_1 e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{e^{\lambda x}} \Big(\underbrace{\lambda^n + \lambda^{n-1} a_{n-1} + \ldots + \lambda a_1 + a_0}_{=: p(\lambda)} \Big) = 0$$

$=: p(\lambda)$ <u>Charakterist. Polynom</u> der Dgl $(*)$.

Es gilt $p(\lambda) = (-1)^n \cdot$ (Charakt. Polynom von A)

Nun gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Falls p n verschiedene reelle Nullst. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

besitzt:

$$\{y_{[1]}(x) = e^{\lambda_1 x}, \ldots, y_{[n]}(x) = e^{\lambda_n x}\} \quad (F)$$

ist ein Fundamentalsystem für $(*)$

- Falls p n verschiedene komplexe Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ besitzt

Ersetze in F

$e^{\lambda x}, e^{\bar{\lambda} x}$ durch $\mathrm{Re}(e^{\lambda x}), \mathrm{Im}(e^{\lambda x})$

$\Rightarrow$ reelles Fundamentalsystem

- Falls p eine reelle Nullstelle λ der Vielfachheit $k \geq 2$ besitzt:

Dann ist A nicht diagonalisierbar und es müssen die Funktion

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda x}$$

in das Fundamentalsystem aufgenommen werden.

- Falls p eine kompl. Nst. $\lambda \in \mathbb{C}$ der Vielfachheit $k \geq 0$ besitzt. Dann ist auch $\bar{\lambda}$ Nst. der Vielfachheit k. Zu diesen beiden Nullst. gehören $\mathrm{Re}(e^{\lambda x}), \mathrm{Im}(e^{\lambda x}), x\mathrm{Re}(e^{\lambda x}), x\,\mathrm{Im}(e^{\lambda x}), \ldots x^{k-1}\mathrm{Re}(e^{\lambda x}), x^{k-1}\mathrm{Im}(e^{\lambda x})$ ins Fundamentalsystem.

Beachte: $\mathrm{Re}(e^{\lambda x}) = e^{\mathrm{Re}(\lambda)\cdot x} \cdot \cos(\mathrm{Im}(\lambda)x)$,

$\mathrm{Im}(e^{\lambda x}) = e^{\mathrm{Re}(\lambda) x} \cdot \sin(\mathrm{Im}(\lambda)\cdot x)$

9.51 Beisp: 1) $y''' - y'' - y' + y = f(x) \quad (I)$

a) Homogen: $y''' - y'' - y' + y = 0 \quad (H)$

Ansatz $y = e^{\lambda x}$ in (H) eingesetzt

$$\Rightarrow e^{\lambda x}\big(\underbrace{\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1}_{p(\lambda)}\big) = 0$$

$$p(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) \overset{!}{=} 0$$

$\lambda = 1$ ist doppelte Nullst., $\lambda = -1$ einfache Nst.

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem

$$\{y_{[1]}(x) = e^x,\ y_{[2]}(x) = xe^x,\ y_{[3]}(x) = e^{-x}\}$$

bzw. allg. Lös.

$$y_{hom}(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

b) Inhom: Var der Konst:

$$y = c_1(x) e^x + c_2(x) x e^x + c_3 e^{-x}$$

mit

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{-x} \\ e^x & (x+1)e^x & -e^{-x} \\ e^x & (x+2)e^x & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ c_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1' = -\frac{1}{2} x e^{-x} f(x) - \frac{1}{4} e^{-x} f(x), \\ c_2' = \frac{1}{2} f(x) e^{-x}, \quad c_3' = \frac{1}{4} f(x) e^{x} \end{cases}$$

2) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 2i$ sind doppelte Nst.

$Re(e^{\lambda_1 x}) = Re\, e^{2ix} = \cos(2x)$

$Im(e^{\lambda_1 x}) = \sin(2x)$

$\Rightarrow$ Allg Lös

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + c_3 x \cos(2x) + c_4 x \sin(2x), \quad c_j \in \mathbb{R}$$

3) $y'' - 4y = f(x)$

a) Homogen: $y'' - 4y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2$

$\Rightarrow$ Allg Lös: $y_{hom}(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) Inhom: Var. der Konst. $y(x) = c_1(x) e^{2x} + c_2(x) e^{-2x}$

wobei

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow c_2' = -\frac{1}{4} f(x) e^{2x}, \quad c_1' = \frac{1}{4} f(x) e^{-2x}$

z.B. $f(x) = e^{2x}$: $\quad c_2' = -\frac{1}{4} e^{4x}, \quad c_1' = \frac{1}{4}$

Wähle $c_2 = -\frac{1}{16} e^{4x}, \quad c_1 = \frac{1}{4} x$

$\Rightarrow y_{part}(x) = \frac{1}{4} x e^{2x} - \frac{1}{16} e^{2x}$ in y_{hom} enthalten kann weggelassen werden

$\Rightarrow$ Allg Lös. $y = \frac{1}{4} x e^{2x} + c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$