Übungsblatt 1

»So seltsam es auch klingen mag, die Stärke der Mathematik beruht auf dem Vermeiden jeder unnötigen Annahme und auf ihrer großartigen Einsparung an Denkarbeit.«

(Ernst Mach; 1838–1916)

Hinweis für alle folgenden Aufgabenblätter: Die Kennzeichnung **V** *bedeutet, dass es sich um eine Votieraufgabe handelt, welche Sie in der Übungsgruppe an der Tafel vorrechnen können müssen (insgesamt $\geq 50\%$ der Aufgaben); Ihre Lösungen zu den mit* **S** *gekennzeichneten (schriftlichen) Aufgaben geben Sie in der nächsten Übung Ihrem Tutor ab, welcher diese korrigieren und Ihnen eine Woche später bepunktet zurückgeben wird. Am Ende des Semesters benötigen Sie auch hiervon $\geq 50\%$ der erreichbaren Punkte. Es sind stets alle Schritte und Entscheidungen zu begründen.*

V 1.1. **a)** Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1.) durch Spalten– und Zeilenumformungen, **2.)** durch Entwicklung.

b) Wie lauten die Determinanten der Matrizen A^T, A^{-1}, A^2, $A \cdot A^T$ und $A + A^T$?

c) Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, die $B^T = -B$ erfüllt, so gilt $\det(B) = 0$.

V 1.2. Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 6 & -6 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B := \begin{pmatrix} 5 & -7 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 6 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume der Matrizen A und B.

b) Geben Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

c) Existiert für jede der beiden Matrizen eine Basis aus Eigenvektoren? Wie lautet diese gegebenenfalls?

V 1.3. Gegeben sei die von $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$C_\alpha := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\alpha & 2+2\alpha \\ 0 & 2+2\alpha & 1-4\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von C_0 .

b) Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor von C_0 auch Eigenvektor von C_α , für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, ist. Bestimmen Sie hiermit die Eigenwerte von C_α .

Bitte wenden!

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

V 1.4. Zwei Matrizen $X, Y \in M_{n,n}$ heißen *simultan diagonalisierbar*, wenn sie eine gemeinsame Basis aus Eigenvektoren besitzen (d.h. es gibt eine Basis B, deren Vektoren sowohl Eigenvektoren von X als auch von Y sind). Beschreibt S die zugehörige Basiswechselmatrix, so bedeutet dies, dass sowohl $S^{-1} \cdot X \cdot S$ als auch $S^{-1} \cdot Y \cdot S$ Diagonalgestalt haben.
Zeigen Sie:

a) Sind $X, Y \in M_{n,n}$ zwei simultan diagonalisierbare Matrizen, dann gilt $X \cdot Y = Y \cdot X$.

b) Man kann beweisen, dass zwei Matrizen $X, Y \in M_{n,n}$ genau dann simultan diagonalisierbar sind, wenn $X \cdot Y = Y \cdot X$ gilt. Prüfen Sie mit diesem Kriterium, welche der Matrizen

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad Y := \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad Z := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -7 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

simultan diagonalisierbar sind.

V 1.5. **a)** Stellen Sie fest, ob die folgenden quadratischen Formen positiv definit sind:

$$Q_1 \; : \; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; x \longmapsto 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2,$$
$$Q_2 \; : \; \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; x \longmapsto 2x_2^2 - \sqrt{2}\,x_1x_2 + 4x_1x_3 - \sqrt{2}\,x_2x_3 \; .$$

Bringen Sie hierfür zunächst die quadratische Form jeweils in der Form $Q(x) = \langle A\,x, x\rangle$ mit geeigneter symmetrischer Matrix A. Bestimmen Sie dann eine Orthonormalbasis B aus Eigenvektoren von A und geben Sie die quadratische Form als Funktion von y an, wobei y die Koordinaten bezüglich der Basis B bezeichnet.

b) Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv semidefinit. Zeigen Sie: Für jede Matrix $S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ ist $S^T \cdot A \cdot S$ symmetrisch und positiv semidefinit.