

## Übungsblatt 2

»Die Mathematik ist die Wissenschaft von dem, was sich von selbst versteht.«

(Heinrich Heine; 1797 - 1856)

Alle Aufgaben dieses Blattes sind schriftlich zu lösen. Ihre Lösungen geben Sie, versehen mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Gruppennummer**, am Ende der Vorlesung am Mittwoch, den 24. April 2019 zur Korrektur ab.

Bitte beachten Sie die Überschneidung der aktuellen Vorlesungsinhalte mit dem in den Kapiteln 2.3 und 2.4 des Vorlesungsskriptes behandelten Sachverhalts.

**S 2.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Zeigen Sie:

- (a) Ist  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $V$  und  $d$  definiert durch  $d(x, y) := \|x - y\|$  die davon induzierte Metrik auf  $V$ , dann gilt
- 1.) Für alle  $x, y, z \in V$  gilt  $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ .
  - 2.) Für alle  $x \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  gilt  $d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = |\lambda| \cdot d(x, y)$ .
- (b) Ist  $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine Metrik die die Eigenschaften **1.)** und **2.)** aus **(a)** erfüllt, dann definiert  $\|x\|_d := d(x, 0)$  eine Norm auf  $V$ .
- (c) Die diskrete Metrik, die durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & , \text{für } x = y \\ 1 & , \text{für } x \neq y \end{cases}$$

definiert ist, wird nicht von einer Norm induziert.

**S 2.2.** Prüfen Sie, ob nachstehende Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent, divergent oder bestimmt divergent sind und geben Sie gegebenenfalls  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  an (bei bestimmter Divergenz  $+\infty$  oder  $-\infty$ ).

(a)  $a_n = \frac{\sqrt{n} - 2n^2}{3n - 1}$       (b)  $a_n = q^n$  mit  $q \in \mathbb{R}$

(c)  $a_n = \left( \frac{(-3)^n}{2^{2n}} \right)$       (d)  $a_n = \left( \frac{\sqrt{n} - \sqrt{3n} - \sqrt{n+2}}{\frac{\cos(\sqrt{n})^2}{n^2-2}} \right)$

*Hinweis:* Unterscheiden Sie bei **(b)** die Fälle  $q < -1$ ,  $q = -1$ ,  $-1 < q < 1$ ,  $q = 1$  und  $q > 1$ .

**S 2.3.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Welche der divergenten Reihen sind bestimmt divergent?

(a)  $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$       (b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^{k-2}$       (c)  $\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

(d)  $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3}{k} - \frac{3k-3}{k^2-1}\right)$       (e)  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot k$       (f)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a+k)(a+1+k)}$  mit  $a > 0$