Priv.-Doz. Dr. P. H. Lesky
Arne Geyer, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.
Dr. Sam Thelin

Übungsblatt 3

»Eine mathematische Wahrheit ist an sich weder einfach noch kompliziert, sie ist.«

(Émile Lemoine; 1840 - 1912)

V 3.1. Zu einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind die Reihen

$$A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ , \qquad B := \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \qquad \text{und} \qquad C := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

definiert. Beweisen Sie oder widerlegen Sie mit einem Gegenbeispiel:

(a) A konvergiert $\Longrightarrow$ B konvergiert **(b)** B konvergiert $\Longrightarrow$ A konvergiert
(c) B konvergiert $\Longrightarrow$ C konvergiert **(d)** C konvergiert $\Longrightarrow$ B konvergiert

V 3.2. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $a_n := \dfrac{1}{2n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alterniert.

(b) Die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

Warum kann das Leibniz–Kriterium nicht angewandt werden?

V 3.3. **(a)** Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Reihen konvergent?

1.) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$ **2.)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x+n)^2$ **3.)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2+x^2}\right)^n$ **4.)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\,n(x+1)}$

(b) Sei $q \in \mathbb{C}$, mit $|q| < 1$. Bestimmen Sie eine Reihendarstellung für

$$\frac{1}{(1-q)^3} = \frac{1}{(1-q)^2} \cdot \frac{1}{1-q} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\ q^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) \ ,$$

indem Sie das Cauchy–Produkt der Reihen berechnen.

V 3.4. Untersuchen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!}$ **(b)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ **(c)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\sqrt{n}-n}$ **(d)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ **(e)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n - n^3}{3^n + n^2}$

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{n+3}{3n+1}\right)^n$ **(g)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{2(n!)}{(2n)!}$ **(h)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+3)}}$

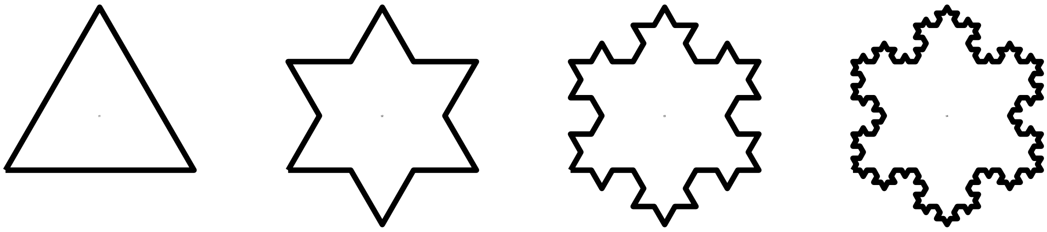
Bitte wenden!

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

V 3.5. Die *„Koch'schen Schneeflocken"* S_n entstehen nach folgender Vorschrift:

Die Ausgangsfigur S_0 ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1. Figur S_n entsteht aus S_{n-1}, indem auf dem mittleren Drittel jedes geradlinigen Randstücks ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Berechnen Sie den Umfang U_n und den Flächeninhalt F_n der Figur S_n sowie $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} F_n$.



S_0 S_1 S_2 S_3