Übungsblatt 4

»Die Mathematik ist eine Art Spielzeug, welches die Natur uns zuwarf zum Troste und zur Unterhaltung in der Finsternis.«

(Jean-Baptist le Rond d'Alembert; 1717 - 1783)

*Die Aufgabe **S 4.3** ist schriftlich zu lösen. Ihre Lösungen geben Sie, versehen mit Ihrem Namen, in Ihrer nächsten Übungsgruppe (06.05.-07.05.) Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor zur Korrektur ab.*

V 4.1. **(a)** Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$, für die die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n} z^n$ konvergiert.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von **(a)** alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos n) x^n$ konvergiert.

(c) Wie lauten die Grenzwerte der beiden Reihen?

V 4.2. **(a)** Bestimmen Sie die Entwicklungspunkte und Konvergenzradien der folgenden komplexen Potenzreihen:

1.) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 - 4n^3)\,(z - \mathrm{i})^{\mathrm{n}}$ **2.)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2} z^n$ **3.)** $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n\,, \quad a \in \mathbb{R}$

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

1.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ **2.)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{n^2} (x-2)^n$ **3.)** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} (x^2 + 2x)^n$

S 4.3. (6 Punkte, Abgabe am 06.05 bzw. 07.05.2019)

Verwenden Sie Darstellungen von $\sin(z)$ und $\cos(z)$ aus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}$, um die nachstehenden Aussagen zu zeigen.

(a) Beweisen Sie das Additionstheorem

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 \quad \text{für } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

(b) Bestimmen Sie $\sin(\pi + \mathrm{i})$ mithilfe der reellen Exponentialfunktion.

(c) Leiten Sie eine allgemeine Formel zur Bestimmung von $\cos(x + \mathrm{i}y)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ her.

Bitte wenden!

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

V 4.4. Es sei $A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass $A_\lambda^n = \begin{pmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(b) Berechnen Sie e^{A_λ}.

V 4.5. Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^2$

a) mit Hilfe des Folgenkriteriums, **b)** mit Hilfe des ε–δ–Kriteriums.

V 4.6. Sind folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an der Stelle $(0,0)$ stetig?

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y. \end{cases}$$

Hinweis: Untersuchen Sie das Verhalten von f, wenn man sich dem Punkt $(0,0)$

(i) auf der x-Achse, (ii) auf der y-Achse nähert.

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$