Übungsblatt 5

»Ein Mathematiker, der nicht irgendwie ein Dichter ist, wird nie ein vollkommener Mathematiker sein.«

(Karl Weierstraß; 1815 - 1897)

V 5.1. Gegeben sei die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) := x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x + 7$.

(a) Folgern Sie aus dem Zwischenwertsatz, dass p mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

Hinweis: Finden Sie ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) < 0$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von Intervallschachtelung eine Nullstelle von p numerisch mit einer Genauigkeit besser als 0.25.

V 5.2. Die *Hyperbelfunktionen* $\sinh$ und $\cosh$ sind definiert durch

$$\sinh x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Stellen Sie fest, ob $\sinh$ und $\cosh$ gerade oder ungerade Funktionen sind.

(b) Stellen Sie $\sinh x$ und $\cosh x$ als Potenzreihen um $x_0 = 0$ dar.

(c) Warum sind $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend?

(d) Sei Arsinh die Umkehrfunktion von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und sei Arcosh_+ die Umkehrfunktion von $\cosh : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ (Areafunktionen genannt). Skizzieren Sie die Graphen der Hyperbelfunktionen sowie die Graphen von Arsinh und Arcosh_+.

(e) Lösen Sie die Gleichungen $\cosh x = y$ und $\sinh x = y$ nach e^x auf und leiten Sie die folgenden Beziehungen her:

$$\operatorname{Arsinh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \quad \text{für } y \in \mathbb{R},$$
$$\operatorname{Arcosh}_+ y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}) \quad \text{für } y \geq 1.$$

V 5.3. **(a)** Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } x \mapsto \begin{cases} 2 + (2 - x)^2 & \text{für } x \leq 1, \\ a - (1 - 2x)^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

stetig ist. Skizzieren Sie für dieses a das Schaubild von f_a.

(b) Geben Sie ein Beispiel für zwei unstetige Funktionen $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ an, deren Verknüpfung $f \circ g$ stetig ist.

Bitte wenden!

V 5.4. **(a)** Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen auf den entsprechenden Intervallen ihr Maximum oder Minimum annehmen:

1.) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + x - 12}$

2.) $g : [0,1[\to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \dfrac{1}{x^3 - 1}$

3.) $h : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \sin(x) & \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{2} & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen monoton wachsend, streng monoton wachsend, monoton fallend oder streng monoton fallend sind:

1.) $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

2.) $g : [1,2] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 4x - 5}$

3.) $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$