Priv.-Doz. Dr. P. H. Lesky
Arne Geyer, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.
Dr. Sam Thelin

Übungsblatt 6

»Mach' dir keine Sorgen wegen deiner Schwierigkeiten mit der Mathematik. Ich kann dir versichern, daß meine noch größer sind. «

(Albert Einstein; 1879 - 1955)

V 6.1. Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$f_n(x) := \frac{1}{1+nx}, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ x \in [0,1].$$

Zeigen Sie, dass (f_n) auf jedem Intervall $[a,1]$, mit $0 < a < 1$, gleichmäßig konvergiert.
Liegt auch auf $[0,1]$ gleichmäßige Konvergenz vor?

V 6.2. Zeigen Sie mit Hilfe des Weierstraß–Kriteriums, dass die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + |x|}$$

gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$ sind.

V 6.3. Untersuchen Sie für jede der angegebenen Funktionen $f :]1,2[\longrightarrow \mathbb{R}$, ob die Grenzwerte $\lim\limits_{x\downarrow 1} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\uparrow 2} f(x)$ existieren:

a) $f(x) := \dfrac{2x^2-3x-2}{(x^2+1)(x-2)^2}$, **b)** $f(x) := \dfrac{2x^3-5x-6}{x^2-3x+2}$, **c)** $f(x) := \dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}{x-1}$.

Wie können die Funktionen ggf. bei $x = 1$ bzw. $x = 2$ stetig ergänzt werden?

V 6.4. Berechnen Sie mit Hilfe von Potenzreihen die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3\cos x}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}-\cos x}{\mathrm{e}^x - 1 - x}$, **c)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(1+x)}{\sin^2 x}$.

V 6.5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) Ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig?

b) Warum ist f auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar? Berechnen Sie dort die Ableitung f'.

c) Warum ist f in $x = 0$ nicht differenzierbar?

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de