

Übungsblatt 7

»Nicht etwa, dass bei größerer Verbreitung des Einblickes in die Methode der Mathematik notwendigerweise viel mehr Kluges gesagt würde als heute, aber es würde sicher viel weniger Unkluges gesagt.«

(Karl Menger; 1902 - 1985)

V 7.1. Bestimmen Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ der Funktion f und bestimmen Sie die erste und die zweite Ableitung:

(a) $f(x) = (\sin x)^3$ (b) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+3)^3}$ (c) $f(x) = x 2^{x-1}$ (d) $f(x) = \ln(x \cos(x)^2)$

V 7.2. (a) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x^7 - 4x^4 + 5x - 10$.

(i) Beweisen Sie, dass f streng monoton wächst.

(ii) Wie viele Nullstellen besitzt f ?

(iii) Es bezeichne f^{-1} die Umkehrfunktion von f . Bestimmen Sie $(f^{-1})'(1)$.

(b) Zu den die Hyperbelfunktionen \cosh und \sinh (vgl. Übungsblatt 5) werden die Umkehrfunktionen mit $\operatorname{arcosh} : [0, \infty] \rightarrow [1, \infty]$ und $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet. Für welche $x \in \mathbb{R}$ existieren deren Ableitungen? Bestimmen Sie diese mittels der Formel für die Umkehrfunktion.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie die Formel $(\cosh y)^2 - (\sinh y)^2 = 1$.

V 7.3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto (\cos x)^2$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die Formel

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} 2^{2n+1} (\sin x)(\cos x).$$

Wie lautet die entsprechende Formel für $f^{(2n)}(x)$?

V 7.4. (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

(b) Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung um die Abschätzung

$$1 - \frac{1}{x} < \ln x < x - 1.$$

für $x \in]1, \infty[$ zu zeigen.

V 7.5. Berechnen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktionen

(a) $f(x) = 3x \ln x - 3x$ (b) $g(x) = \frac{e^{-x^2}}{x}$ (c) $h(x) = (x-1)\sqrt{36-x^2}$

auf ihrem jeweiligen maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$. Bestimmen Sie weiterhin die Nullstellen und verwenden Sie Ihre Ergebnisse, um die Funktionen zu skizzieren.