Übungsblatt 8

»Die Menschen, die den richtigen Weg gehen wollen, müssen auch von Irrwegen wissen.«

(Aristoteles, 384 - 322 v. Chr.)

V 8.1. **(a)** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von l'Hospital:

(i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+7x^2-36}{x^2+5x-14}$ **(ii)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\sqrt{x}}$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\sin x}$ **(iv)** $\lim\limits_{x\downarrow 0}(\sin x)(\ln x)$

(b) Warum liefert die Regel von l'Hospital bei folgender Rechnung ein falsches Ergebnis?

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-4x+1}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x-4}{2x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{6}{2} = 3\,.$$

Wie lautet der Grenzwert tatsächlich?

(c) Wie muss $c \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$ gilt?

V 8.2. **(a)** Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das n–te Taylor–Polynom T_n der Funktion

$$f :]-1,\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \ln(1+x)$$

um die Stelle $x_0 = 0$, und geben Sie das zugehörige Restglied R_n an.

(b) Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, für $x \in [0,1]$. Stellen Sie f damit als unendliche Reihe dar.

V 8.3. Für die Funktionen

$$f_1(x) = \sin x\,, \quad f_2(x) = (1+x)^{3/2}$$

soll jeweils der Wert an den Stellen $x_1 = 0.1$ bzw. $x_2 = 0.9$ bis auf einen Fehler von höchstens 10^{-5} mit Hilfe des Taylorpolynoms (für $x_0 = 0$) bestimmt werden. Geben Sie jeweils an:

(a) Das Restglied $R_n(x)$ für allgemeines n und x.

(b) Ein möglichst kleines $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|R_{n_1}(x_1)| \le 10^{-5}$ und ein möglichst kleines $n_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|R_{n_2}(x_2)| \le 10^{-5}$.

(c) Vergleichen Sie die exakten Werte für $f_j(x_k)$ mit den Werten, die durch die Taylorpolynome berechnet werden.

Hinweis: Bei dieser Aufgabe darf zur Berechnung ein Rechenprogramm verwendet werden.

V 8.4. Sei p ein Polynom vom Grad n. Es bezeichne $T_n(x)$ das n–te Taylorpolynom von p zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Zeigen Sie, dass $T_r(x) = p(x)$ für alle $r \ge n$ gilt.

Bitte wenden!

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

V 8.5. Es sollen die Kurven $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $K_3 \subseteq \mathbb{R}^3$ untersucht werden. Diese sind wie folgt gegeben:

K_1 ist gegeben durch den Graphen der Funktion $f : [-2; 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+x^2}$.

K_2 ist gegeben durch $K_2 := \Big\{ \big(|\phi| \sin(\phi), |\phi| \cos(\phi)\big) \in \mathbb{R}^2 : -\pi \leq \phi \leq \pi \Big\}$.

K_3 ist gegeben durch $K_3 := \Big\{ \big(\cos(\pi t), \sin(\pi t)^2, t^3 - t\big) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq t \leq 1 \Big\}$.

(a) Geben Sie zu jeder Kurve K_j eine Parametrisierung $\gamma_j : I_j \to \mathbb{R}^k$ an ($k \in \{2, 3\}$).

(b) Prüfen Sie, ob die gegebenen Kurven geschlossen oder Jordan-Kurven sind.

(c) Bestimmen Sie für jede Kurve die Menge der (bezüglich Ihrer Parametrisierung aus Aufgabenteil **(a)**) regulären Punkte.

(d) Bestimmen Sie die Tangentengleichung an K_3 im Punkt $\left(0, 1, \frac{3}{8}\right)$.