Übungsblatt 9

»Kein Mensch lernt denken, indem er die fertig geschriebenen Gedanken anderer liest, sondern dadurch, dass er selbst denkt.«

(Mihai Eminescu; 1850 - 1889)

*Die Aufgabe **S 9.4** ist schriftlich zu lösen. Ihre Lösungen geben Sie, versehen mit Ihrem Namen, in Ihrer nächsten Übungsgruppe (17.06.-18.06.) Ihrer Tutorin/Ihrem Tutor zur Korrektur ab.*

V 9.1. **(a)** Der Roboter I schafft Steigungen bis 45%. Er steht auf der Fläche

$$F := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = f(x,y) := \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2\right\}$$

im Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$. Zeigen Sie, dass der Roboter auf „direktem Weg“ zum Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right)$ gelangen kann, das heißt entlang der Kurve K mit Parametrisierung

$$\gamma : [0, 1/2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \big(t, t, f(t,t)\big)\,.$$

(b) Der Roboter II ist nicht so gut und schafft nur Steigungen bis 33%. Wieso kann er den Weg K nicht bewältigen? Finden Sie einen Weg L, auf dem der Roboter II von $(0,0,0)$ zum Punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right)$ gelangen kann.
Hinweis: Verwenden Sie einen zweigeteilten Weg, bestehend aus einem Weg von $(0,0)$ nach $(0, \frac{3}{10})$ und einem Weg von $(0, \frac{3}{10})$ nach $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Die Idee zu diesem Ansatz erhält man durch Bestimmen der Richtungsableitung von f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entlang des Vektors $v := \frac{1}{\|(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - (0, \frac{3}{10})\|}\big((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - (0, \frac{3}{10})\big)$.

V 9.2. Prüfen Sie, für welche Punkte des Definitionsbereichs die folgenden Funktionen differenzierbar sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Ableitungen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \dfrac{x + \sin(xy)}{1 + y^2}$.

(b) $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{1+z^2} \\ \mathrm{e}^{2\sin(z)} \sin(x+y) \end{pmatrix}$.

V 9.3. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto \mathrm{e}^{-x}(y^3 - 2xy)$.

(a) Bestimmen Sie den Gradienten von f. Was unterscheidet die Ableitung f' vom Gradienten ∇f?

(b) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(0, 1, f(0,1))$.

(c) Bestimmen Sie alle Punkte mit waagrechter Tangentialebene.

(d) Bestimmen Sie alle lokalen Minima und Maxima von f.

Bitte wenden!

S 9.4. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \dfrac{2xy}{1 + x^2y^2}$.

(a) Bestimmen Sie die Niveaulinien von f zu den Werten

- **(i)** -1 als Lösungen der Gleichung $f(x, y) = -1$,
- **(ii)** 0 als Lösungen der Gleichung $f(x, y) = 0$,
- **(iii)** 1 als Lösungen der Gleichung $f(x, y) = 1$.

und skizzieren Sie diese in der $xy-$Ebene. Wo ist $f(x, y)$ positiv, wo negativ ?

(b) Zeigen Sie, dass $-1 \le f(x, y) \le 1$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(c) Bestimmen Sie sämtliche Punkte mit horizontaler Tangentialebene und ihre Funktionswerte. Begründen Sie mit Hilfe von **(a)** und **(b)**, ob Maxima, Minima oder Sattelpunkte vorliegen.

V 9.5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (y^2 + y)\,(x^2 + y^2 - 1)$.

(a) Bestimmen Sie die Nullstellenmenge $N_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R} : f(x, y) = 0\}$ von f sowie die Vorzeichenverteilung und skizzieren Sie diese im Rechteck $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

(b) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.

(c) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und tragen Sie diese in Ihre Skizze ein.

(d) Bestimmen Sie für jede kritische Stelle ihren Typ.

V 9.6. Es sei $B := [-1; 1]^2$ und $f : B \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto -x^2 + y^2 + 2x^2y - 2x^3$.

(a) Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und entscheiden Sie jeweils, ob Sattelpunkt, relatives Minimum oder relatives Maximum vorliegt.

(b) Bestimmen Sie den Rand ∂B von B. Welchen minimalen und maximalen Wert nimmt f auf ∂B an?

Hinweis: Sie können f auf ∂B stückweise als Funktion in einer Variablen angeben.

(c) Bestimmen Sie das absolute Minimum und Maximum von f.

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de