Übungsblatt 10

»'Offensichtlich' ist das gefährlichste Wort in der Mathematik.«

(Eric Temple Bell; 1883 - 1960)

V 10.1. **(a)** Es seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $h\colon \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$ differenzierbar wobei $(f(x,y), g(x,y)) \in D$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Sei weiter $\varphi(x,y) := h\big(f(x,y), g(x,y)\big)$. Leiten Sie eine Formel her, wie φ' aus h', f', g' berechnet werden kann.
Hinweis: Definieren Sie eine Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so dass $\varphi = h \circ \psi$ gilt, und wenden Sie die Kettenregel für Funktionen mehrerer Variablen an.

(b) Gegeben sind die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \mathrm{e}^{x-y}, \qquad g(x,y) := \mathrm{e}^{xy}, \quad h(x,y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

(i) Bestimmen Sie f', g', h'.

(ii) φ ist definiert wie in (a). Geben Sie φ an und bestimmen Sie φ' durch Anwendung der Kettenregel aus (a).

V 10.2. Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 4xy^2 - x^3 - 8y^2 + 8xy + 6x^2 - 16y - 8x.$$

(a) Bestimmen Sie die einzige kritische Stelle x_0 und die Hesse-Matrix von f bei x_0.

(b) Geben Sie die Taylorentwicklung von f um x_0 an. Stellen Sie damit fest, ob in x_0 ein relatives Maximum/Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

V 10.3. **(a)** Sei $R > 0$, sei $D = \{x \in \mathbb{R}^n \colon ||x|| < R\}$ und sei $f \in C^1(D \to \mathbb{R})$ mit $\nabla(f)(x) = 0$ für alle $x \in D$. Zeigen Sie, dass f auf D konstant ist. *Zur Diskussion*: Für welche Mengen D lässt sich dieses Ergebnis verallgemeinern?

(b) Sei $H^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x, y, z > 0\}$ und sei $f\colon H^+ \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = \dfrac{x^3 y^3}{z^3}$.
Zeigen Sie unter Verwendung der Notation aus Abschnitt 7.26 vom Skript:

$$\left|\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{f(x,y,z)}\right| \lessapprox 3\left(\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right| + \left|\frac{\Delta z}{z}\right|\right)$$

Bitte wenden!

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

V 10.4. Bestimmen Sie zu den angegebenen Funktionen f die Flächeninhaltsfunktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
Hinweis: Anwendung von Satz 8.11 und Raten.

(a) $f(x) = x + 5$

(b) $f(x) = \mathrm{e}^x$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$

(d) $f(x) = \sin(x)$

(e) $f(x) = x + 5 + 2\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{3}\sin(x)$