Übungsblatt 13

»Ein Mathematiker ist eine Maschine, die Kaffee in Theoreme verwandelt.«

(Paul Erdös; 1913 - 1996)

V 13.1. Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \mathrm{e}^y \sin x$$

a) Zeigen Sie, dass alle Funktionen y mit $y(x) = -\ln(\cos x + c)$ Lösungen sind.

b) Es sei $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Zeigen Sie: Unter den Lösungen aus a) gibt es genau eine, die die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ erfüllt.

c) Geben Sie zu jeder der Anfangsbedingungen

$$\mathbf{c_1})\ y(0) = -\ln 3\,, \quad \mathbf{c_2})\ y(0) = 0\,, \quad \mathbf{c_3})\ y(2\pi) = 0$$

die Lösung sowie ihren maximalen Definitionsbereich an. Skizzieren Sie die drei Funktionen.

d) Welche Eigenschaften muss (x_0, y_0) besitzen, damit die zugehörige Lösung global ist?

V 13.2. Skizzieren Sie für jede der folgenden Differentialgleichungen ihr Richtungsfeld sowie das Schaubild derjenigen Lösung y, die durch den Punkt $(0, 1)$ verläuft.

a) $y' = xy$ **b)** $y' = -xy$

V 13.3. Lösen Sie die folgenden separierbaren Differentialgleichungen:

a) $y' = y^2$ **b)** $y' = \mathrm{e}^{x+y}$

V 13.4. **a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung

$$xy' - y = x \ln x, \qquad \text{für } x > 0.$$

Hinweis: Welche Differentialgleichung wird durch $u(x) := \dfrac{y(x)}{x}$ erfüllt?

b) Geben Sie diejenige Lösung y an, für die $y(1) = 1$ gilt.

V 13.5. Bestimmen Sie jeweils die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen:

a) $y' = (x + y + 3)^2$ **b)** $y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{2y}{x}$

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de