Erste Scheinklausur

- Es gibt 12 Aufgaben. Aufgabe **Z 12** ist eine (freiwillige) Zusatzaufgabe. Die jeweilige Punktzahl steht in Klammern hinter der Aufgabennummer.
- Die Maximalpunktzahl ist somit $43 + 1$.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Eigenes Papier darf lediglich als Konzeptpapier verwendet aber nicht mit abgegeben werden.
- In den Aufgaben **A 7(b)** und **A 8(c)** sind alle Schritte zu begründen. Dabei dürfen Aussagen, die in der Vorlesung oder den Übungen bereits gezeigt wurden, verwendet werden, sofern diese nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Aufgabe **A 8(c)** lösen Sie bitte auf Seite 7.
- Bei den Aufgaben **A 10** und **A 11** ergeben korrekte Kreuze +0,5, falsche Kreuze −0,5 und nicht gesetzte Kreuze 0 Punkte. Negative Punkte werden nicht über die Aufgabe hinaus übertragen.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Füllen Sie bitte zunächst die folgenden vier Kästchen korrekt aus.
- Bitte lesen Sie alle Aufgaben aufmerksam durch. Insbesondere bei den Multiple-Choice-Aufgaben ist auf die genaue Formulierung zu achten!
- Viel Erfolg!

Nachname, Vorname	Gruppennummer

Matrikelnummer	Vorname des Tutors

Korrektur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		Σ

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

A 1. [2 Punkte] Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Definieren Sie, wann eine Funktion $d : M \times M \to \mathbb{R}$ als Metrik bezeichnet wird.

Definition einer Metrik

A 2. [6 Punkte] Sei (a_n) eine Folge in einem metrischen Raum (M, d) und sei (x_n) stets eine Folge **reeller Zahlen**.

(a) Definieren Sie, wann (a_n) gegen $a \in M$ konvergiert.

Konvergenz

(b) Definieren Sie, wann eine Folge (a_n) Cauchy-Folge in M heißt.

Cauchy-Folge

(c) Definieren Sie, wann (x_n) bestimmt divergent ist.

Bestimmte Divergenz

(d) Was wird als Partialsumme (oder Teilsumme) von $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ bezeichnet?

Partialsumme

(e) Definieren Sie, wann die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ konvergiert.

Konvergenz einer Reihe

(f) Definieren Sie, wann die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ bedingt konvergiert.

Bedingte Konvergenz

A 3. [3 Punkte] Füllen Sie die Tabelle wie folgt aus:

- Konvergiert die Folge (x_n), so tragen Sie ihren Grenzwert ein.
- Divergiert die Folge (x_n) bestimmt gegen $+\infty$, so tragen Sie $+\infty$ ein.
- Divergiert die Folge (x_n) bestimmt gegen $-\infty$, so tragen Sie $-\infty$ ein.
- Divergiert die Folge (aber nicht bestimmt), so tragen Sie den Buchstaben **d** ein.

$x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$	$x_n = \begin{pmatrix} \frac{\cos n}{n+1} \\ \frac{n-n^2}{2n+3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$	$x_n = \begin{pmatrix} \frac{2n-1}{n+2} \\ \frac{5^n}{(-3)^{2n}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

A 4. [5 Punkte] Kreuzen Sie **alle** korrekten Antworten an. Ist eine Reihe beispielweise absolut konvergent, es wird aber *nur* konvergent angekreuzt, so gibt es 0,5 statt 1 Punkt. Kreuzen Sie eine falsche Antwort an, so ergibt dies einen **Abzug** von 0,5 Punkten.
Spalte 1 dient als Beispiel.

	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} k$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-k)^k$	$\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k+1}{k^2-1}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\pi^k (\cos k)^2}{4^k}$
konvergent						
absolut konvergent						
divergent	✗					
bestimmt divergent	✗					

A 5. [3 Punkte] Bestimmen Sie die Grenzwerte folgender Reihen.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^k$	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k+2} - \frac{k}{k+1}\right)$	$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

A 6. [4 Punkte] Geben Sie den Konvergenzradius R der folgenden Potenzreihen an.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)^n z^n$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!(z-2)^n$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3n^2\left(\frac{z-5}{2}\right)^n$	$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}(z+\mathrm{i})^n$
$R =$	$R =$	$R =$	$R =$

A 7. [4 Punkte]

(a) Geben Sie die Definition der komplexen Exponentialfunktion an.

Definition

(b) Beweisen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung

$$2(\cos z)(\sin z) = \sin(2z)\ .$$

Beweis

A 8. [7 Punkte] Sei (M, d) ein metrischer Raum und $D \subset M$ eine Teilmenge. Teilaufgabe **(c)** ist auf Seite 7 zu lösen.

(a) Geben Sie zwei äquivalente (aber unterschiedliche) Definitionen dafür an, dass $f : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Definition 1
Definition 2

(b) Formulieren Sie Voraussetzungen und Aussage des Zwischenwertsatzes von Bolzano.

Voraussetzungen
Aussage

(c) **Lösen Sie diese Aufgabe auf Seite 7**: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{Z}$. Beweisen Sie, dass f konstant ist.

A 9. [3 Punkte] Geben Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ an, in denen die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind.

$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$	$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ x^2 & \text{für } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} - 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

A 10. [$7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$ Punkte] In dieser Aufgabe sind keinerlei Begründungen gefordert. Es gilt der Bewertungsmaßstab der Kurztests. **Es sei stets (M, d) ein beliebiger metrischer Raum und $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum.**

(a) Auf $(V, \|\cdot\|)$ kann stets eine Metrik definiert werden. .... wahr ☐ falsch ☐

(b) Für alle $x, y, z \in M$ gilt $d(x, y) \leq |d(x, z) - d(z, y)|$. .... wahr ☐ falsch ☐

(c) In (M, d) ist jede Cauchy-Folge konvergent. .... wahr ☐ falsch ☐

(d) In (M, d) ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge. .... wahr ☐ falsch ☐

(e) Sei (x_n) eine nicht-negative, reelle Folge mit beschränkter Teilsummenfolge. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergent. .... wahr ☐ falsch ☐

(f) Sei $(V, \|\cdot\|)$ zusätzlich vollständig und (x_n) eine Folge in V. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. .... wahr ☐ falsch ☐

(g) Sei $(V, \|\cdot\|)$ zusätzlich vollständig und (x_n) eine Folge in V. Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ in V, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$. .... wahr ☐ falsch ☐

A 11. [$5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$ Punkte] In dieser Aufgabe sind keinerlei Begründungen gefordert. Es gilt der Bewertungsmaßstab der Kurztests.

(a) Ist $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt. .... wahr ☐ falsch ☐

(b) Gilt $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ für zwei Folgen $(x_n), (y_n)$ in $\mathbb{C}$, so folgt $(x_n) = (y_n)$. .... wahr ☐ falsch ☐

(c) Für alle $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ist e^A invertierbar. .... wahr ☐ falsch ☐

(d) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann folgt, dass $f \circ g$ in x_0 stetig ist. .... wahr ☐ falsch ☐

(e) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nicht stetig. Dann folgt, dass $f \circ g$ ebenfalls nicht stetig ist. .... wahr ☐ falsch ☐

Z 12. Zusatzaufgabe [1 Punkt] Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die in $x_0 = 0$ stetig ist und sonst unstetig.

Lösung

Lösung zu Aufgabe 8.(c)

Beweis