Priv.-Doz. Dr. P. H. Lesky
Arne Geyer, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.
Dr. Sam Thelin

Zweite Scheinklausur

- Es gibt 10 Aufgaben. Die jeweilige Punktzahl steht in Klammern hinter der Aufgabennummer.
- Die Maximalpunktzahl ist somit 57.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Eigenes Papier darf lediglich als Konzeptpapier verwendet aber nicht mit abgegeben werden.
- In der Aufgabe **A 1(d)** sind alle Schritte zu begründen. Dabei dürfen Aussagen, die in der Vorlesung oder den Übungen bereits gezeigt wurden, verwendet werden, sofern diese nicht Gegenstand der Aufgabe selbst sind.
- Bei Aufgabe **A 10** ergeben korrekte Kreuze +0,5, falsche Kreuze −0,5 und nicht gesetzte Kreuze 0 Punkte. Negative Punkte werden nicht über die Aufgabe hinaus übertragen.
- Abgaben mit Bleistift, sowie Abgaben in roter oder grüner Farbe werden nicht gewertet.
- Füllen Sie bitte zunächst die folgenden vier Kästchen korrekt aus.
- Bitte lesen Sie alle Aufgaben aufmerksam durch. Insbesondere bei den Multiple-Choice-Aufgaben ist auf die genaue Formulierung zu achten!
- Viel Erfolg!

Nachname, Vorname	Gruppennummer
Matrikelnummer	**Vorname des Tutors**

Korrektur:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		Σ

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

A 1. [6 Punkte] Sei (f_n) eine Funktionenfolge reeller Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Definieren Sie, wann (f_n) **punktweise** gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Punktweise Konvergenz

(b) Definieren Sie, wann (f_n) **gleichmäßig** gegen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert.

Gleichmäßige Konvergenz

(c) Seien ab jetzt die Funktionen f_n gegeben durch $f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{1 + n^2x^2}$. Geben Sie die Grenzfunktion f an, gegen die (f_n) **punktweise** konvergiert.

Grenzfunktion f

(d) Überprüfen Sie, ob (f_n) **gleichmäßig** gegen f konvergiert. Es gibt keine Folgefehler, falls Sie in **(c)** die falsche Grenzfunktion angegeben haben. Es werden nur begründete Aussagen bepunktet.

Beweis

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

A 2. [1 Punkt] Auf ihrem (maximalen) Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{x^2 - \mathrm{e}^{2x}}{x + \mathrm{e}^x}$$

gegeben. Existiert eine stetige Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$? Mit anderen Worten, existiert ein $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g|_D = f$? Geben Sie entweder g an oder tragen Sie **nicht existent** in untenstehendes Kästchen ein.

$g(x) = \ldots$ oder **nicht existent**

A 3. [9 Punkte] Sei $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Definieren Sie, wann f in $x_0 \in]0,1[$ differenzierbar ist.

Definition

(b) Bestimmen Sie zu den gegebenen Funktionen f jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und ihre erste Ableitung f'.

$f(x)$	D	$f'(x)$
$\mathrm{e}^{2\sqrt{x}}$		
$(x^2 + 2x)\cos(-x)$		
$2^{\sin x}$		
$\frac{\ln\|x\|}{x}$		

A 4. [3 Punkte] Sei $a > 0$ mit $a \neq 1$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und vereinfachen Sie diese soweit wie möglich.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + 4x - 1}{8x}$	$\lim\limits_{x\to\infty} \exp\left(\cos\left(\dfrac{\pi x^2 + x}{2 + 4x^2}\right)\right)$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$

A 5. [5 Punkte]

(a) Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $n \in \mathbb{N}_0$. Nach dem **Satz von Taylor und Lagrange** existiert zu jeder Funktion $f \in C^{n+1}(]a,b[)$ mit $x_0 \in]a,b[$ und $x \in]x_0,b[$ ein $\xi \in]x_0,x[$ mit

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x).$$

Geben Sie allgemein das Taylorpolynom T_n und das Lagrange Restglied R_n an.

$T_n(x) =$

$R_n(x) =$

(b) Betrachten Sie $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ und bestimmen Sie

(i) $T_2(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und

(ii) $T_2(x)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(i) $T_2(x) =$

(ii) $T_2(x) =$

A 6. [6 Punkte]

(a) Die Kurve $K_\gamma = \{\gamma(t) : t \in [0, \pi]\}$ sei durch

$$\gamma(t) = \sin(t) \begin{pmatrix} -\cos(2t) \\ \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi],$$

parametrisiert. Skizzieren Sie K_γ in ein geeignetes, mit einer Skala auf der x-Achse versehenes, x-y-Koordinatensystem.

Nutzen Sie für diese Skizze das karierte Feld auf der rechten Seite. Nutzen Sie **keinen** Bleistift.

(b) Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor von γ in $t_0 = \pi/2$.

$T(t_0) =$

(c) Kreuzen Sie die korrekten Antworten an (wie immer gilt: $+0{,}5$, 0 oder $-0{,}5$ Punkte pro Antwort; Abzüge werden mit Aufgabenteil **(a)** und **(b)** verrechnet.)

(i) K_γ ist geschlossen. .... wahr ☐ falsch ☐

(ii) K_γ ist eine Jordan-Kurve. .... wahr ☐ falsch ☐

(iii) Die Kurve K_γ wird wie folgt durchlaufen: .... $\circlearrowright$ ☐ $\circlearrowleft$ ☐

Priv.-Doz. Dr. P. H. Lesky
Arne Geyer, M.Sc.
Robin Lang, M.Sc.
Dr. Sam Thelin

A 7. [9 Punkte] Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)(x - 1) = x^3 + xy^2 - x^2 - y^2 - x + 1.$$

(a) Skizzieren Sie die

- **(i)** Nullstellenmenge von f und die
- **(ii)** Vorzeichenverteilung (durch Einzeichnen von $\oplus$ und $\ominus$)

in ein **gemeinsames** Koordinatensystem.

Nutzen Sie für diese Skizze das karierte Feld auf der rechten Seite. Nutzen Sie **keinen** Bleistift.

(b) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ und die Hessematrix $H_f(x,y)$ von f.

$\nabla f(x,y) =$

$H_f(x,y) =$

(c) Bestimmen Sie die beiden kritischen Punkte von f und charakterisieren Sie deren Typ so genau wie möglich.

Kritischer Punkt		
Typ		

peter.lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
[arne.geyer, robin.lang, sam.thelin]@mathematik.uni-stuttgart.de

A 8. [6 Punkte]

(a) Seien $k, n, m \in \mathbb{N}$ und seien $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ bzw. $D_g \subseteq \mathbb{R}^m$ die Definitionsbereiche der Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}^m$ bzw. $g : D_g \to \mathbb{R}^k$. Formulieren Sie Voraussetzungen und Aussagen der Kettenregel für die Differenzierbarkeit von $h = g \circ f$ im Punkt $x_0 \in D_f$.

Voraussetzungen

Aussagen

(b) Seien nun $x, y, z \in \mathbb{R}$ und seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ \\ x \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad g(y, z) = yz.$$

Bestimmen Sie die folgenden vier Ableitungen.

$f'(x) =$	$g'(y, z) =$
$(f \circ g)'(y, z) =$	$(g \circ f)'(x) =$

A 9. [7 Punkte]

(a) Berechnen Sie die folgenden Stammfunktionen und vereinfachen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

(i) $\int \left(\frac{x^2}{3} + x - \sqrt{2}\right) \mathrm{d}x \quad =$

(ii) $\int \mathrm{e}^{-3x+1} \, \mathrm{d}x \quad =$

(iii) $\int x \ln x \, \mathrm{d}x \quad =$

(iv) $\int 2x \cos\left(x^2 + 1\right) \mathrm{d}x \quad =$

(b) Berechnen Sie

$$\int \frac{4x-1}{x^2-x-2} \, \mathrm{d}x,$$

indem Sie eine Partialbruchzerlegung des Integranden durchführen. Geben Sie sowohl diese Partialbruchzerlegung als auch Ihr Ergebnis an.

(i) $\frac{4x-1}{x^2-x-2} \quad =$

(ii) $\int \frac{4x-1}{x^2-x-2} \, \mathrm{d}x \quad =$

A 10. [10 · 0,5 = 5 Punkte] In dieser Aufgabe sind keinerlei Begründungen gefordert. Es gilt der Bewertungsmaßstab der Kurztests.

(a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ und die Hessematrix $H_f(x_0)$ habe die beiden Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, welcher Typ von Extremum vorliegt. **NE** steht für **nicht entscheidbar**.

(i) $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$. .... Min ☐ Max ☐ Sattel ☐ NE ☐

(ii) $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 < 0$. .... Min ☐ Max ☐ Sattel ☐ NE ☐

(iii) $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 > 0$. .... Min ☐ Max ☐ Sattel ☐ NE ☐

(b) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beschränkt. .... wahr ☐ falsch ☐

(c) Jede differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig. .... wahr ☐ falsch ☐

(d) Jede stetige Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar. .... wahr ☐ falsch ☐

(e) $x \in D \subseteq \mathbb{C}$ ist ein innerer Punkt von D genau dann, wenn gilt: $\forall\, \varepsilon > 0\ B_\varepsilon(x) \subseteq D$. .... wahr ☐ falsch ☐

(f) Die Funktion $g :]0, \infty[\to \mathbb{R} : g(x) = \sqrt{x}$ ist stetig differenzierbar. .... wahr ☐ falsch ☐

(g) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f monoton wachsend auf $\mathbb{R}$. .... wahr ☐ falsch ☐

(h) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es existiere ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann ist f nicht streng monoton wachsend. ...... wahr ☐ falsch ☐