IADM, Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart

PD Dr. P. H. Lesky

Prüfung Mathematik für inf, msv, swt 09.09.2011

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- Verlangt und gewertet werden **alle 9 Aufgaben**.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Keine.
- Bei der Bearbeitung der Aufgaben sind alle Lösungsschritte und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Verwenden Sie für Ihre Bearbeitungen das ausgeteilte Papier und beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.
- Die folgenden Funktionswerte könnten hilfreich sein:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.
- **Hinweise für Wiederholer:** Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
  Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, erhalten die nötigen Informationen auf der Homepage der Vorlesung.

  VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (5 Punkte): Es sei $f(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{2x}\left(n\,2^{n-1} + 2^n\,x\right)$.

Aufgabe 2 (9 Punkte): Gegeben sind die Matrix A und die Vektoren a, b, c:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A.

b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A.

c) Begründen Sie, dass $B = \{a, b, c\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

d) Ein Vektor x habe bezüglich der Basis B die Koordinaten $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_B$. Wie lauten seine Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis $E = \{e_1, e_2, e_3\}$?

e) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $M_{\mathrm{Id}}^{B,E}$.

f) Gegeben ist der Vektor $y = 4e_1 - 2e_2 + 3e_3$. Berechnen Sie die Koordinaten von y bezüglich der Basis B.

Aufgabe 3 (7 Punkte):

a) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 = 2\mathrm{i}$.

b) Das Polynom $p(z) = z^3 + z^2 - (1 + 8\mathrm{i})z - (1 - 8\mathrm{i})$ besitzt die Nullstelle $z_1 = 1$. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen.

Aufgabe 4 (8 Punkte): Es seien V, W lineare Vektorräume über $\mathbb{R}$ und $T : V \to W$ linear.

a) Geben Sie die Definition dafür an, dass T linear ist.

b) Geben Sie die Definition von $\mathrm{Kern}(T)$ an.

c) Geben Sie die Definition dafür an, dass T injektiv ist.

d) Bweisen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) T ist injektiv.

(ii) $\mathrm{Kern}(T) = \{0\}$.

Aufgabe 5 (5 Punkte): Berechnen Sie $\lim\limits_{x \downarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x$

Aufgabe 6 (5 Punkte): Gegeben ist die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\, 2^n} (z-2)^n$.

a) Berechnen Sie den Konvergenzradius.

b) Bestimmen Sie alle reellen x, für die die Reihe konvergiert.

Aufgabe 7 (5 Punkte): Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\ln 4} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + 2}\, \mathrm{d}x$$

mit Hilfe der Substitution $u = \mathrm{e}^x$.

Aufgabe 8 (11 Punkte): Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x, y, z) \to x^3\, y + x\, y^3 - 4xy + z^2$.

a) Weisen Sie nach, dass $P(1, 1, 0)$ ein kritischer Punkt ist.

b) Rechnen Sie nach: Die Hesse-Matrix im Punkt P ist gegeben durch

$$H_f(1, 1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Liegt in P ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt vor?

Aufgabe 9 (12 Punkte): Gegeben ist das Differentialgleichungssystem

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}.$$

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das zugehörige homogene System und berechnen Sie die Wronski-Determinante.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems.