Diplomvorprüfung Mathematik für inf, tpinf, sotech 17.02.2012

Bitte unbedingt beachten:

- Die **Bearbeitungszeit** beträgt 120 Minuten.
- Verlangt und gewertet werden **alle 8 Aufgaben**.
- In der Klausur können maximal **60 Punkte** erreicht werden.
- **Zugelassene Hilfsmittel:** Keine.
- Bei der Bearbeitung der Aufgaben sind alle Lösungsschritte und Begründungen anzugeben. Die Angabe von Endergebnissen allein genügt nicht! Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.
- Die folgenden Funktionswerte könnten hilfreich sein: $\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1,\ \cos 0 = 1,\ \cos\frac{\pi}{2} = 0$.
- Wann die Prüfungsergebnisse vorliegen, wird auf der Homepage der Vorlesung bekanntgegeben.
- **Hinweise für Wiederholer:** Studierende, die diese Prüfung als Wiederholungsprüfung schreiben, werden darauf hingewiesen, dass zu dieser Wiederholungsprüfung eine mündliche Nachprüfung gehört, es sei denn, die schriftliche Prüfung ergibt mindestens die Note 4,0.
  Wiederholer, bei denen eine mündliche Nachprüfung erforderlich ist, erhalten die nötigen Informationen auf der Homepage der Vorlesung.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (7 Punkte):

a) Konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{in\pi/2}}{2^n}$? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

b₁) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$, **b₂)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+2)^3-1}$, **b₃)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte): Die Menge M der Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist mit folgender Addition bzw. Multiplikation mit reellen Zahlen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\begin{aligned}\big(f+g\big)(x) &:= f(x)+g(x) \quad \text{für } f,g \in M,\\ \big(\alpha f\big)(x) &:= \alpha f(x) \quad \text{für } f \in M, \alpha \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $(M,+)$ eine Gruppe. (Dies ist gegeben und nicht zu zeigen!)

a) Zeigen Sie, dass die Menge B der ungeraden Funktionen:

$$B := \big\{f \in M : f(-x) = -f(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}\big\} \subseteq M$$

ein Untervektorraum von M ist.

b) Sei die Menge $C := \big\{f \in M : f(0) = 1\big\} \subseteq M$ gegeben. Ist C ein Untervektorraum von M? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (5 Punkte): Im Vektorraum V sei $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear unabhängig. Beweisen oder widerlegen Sie

a) $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_1\}$ ist linear unabhängig.

b) $\{v_1+v_2, v_2+v_3, v_3+v_4, v_4+v_1\}$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung, die jedem $x \in \mathbb{R}^3$ den

Schnittpunkt der Geraden $g_x := \left\{ x + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ mit der Ebene $E := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}$

zuordnet. Diese Abbildung wird als Parallelprojektion in Richtung $(1,1,1)$ auf die x_1-x_2-Ebene bezeichnet.

a) Bestimmen Sie für einen allgemeinen Punkt $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ das Bild $T(x)$.

b) Bestimmen Sie die Matrix $M_T^{E,E}$ (E = kanonische Basis) und den Kern der Abbildung T.

c) Bestimmen Sie die Bilder der Geraden

$$h_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{und} \qquad h_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

d) Bestimmen Sie das Bild einer beliebigen Geraden $g = \{x = u + \lambda \cdot v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ unter T ($u, v \in \mathbb{R}^3$ fest). Ist das Bild wieder eine Gerade?

Aufgabe 5 (6 Punkte): Gegeben sei eine $n \times n$ Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$, wobei $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig ist. Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von

a) A^2, **b)** A^{-1}, **c)** $2A + \mathrm{Id}$.

Hinweis: Unter den oben gegeben Voraussetzungen ist die Matrix A invertierbar.

Aufgabe 6 (7 Punkte): Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \quad y(1) = -4,$$

und geben Sie den maximalen Definitionsbereich an, auf dem die Funktion eine Lösung des Anfangswertproblems darstellt.

Aufgabe 7 (9 Punkte): Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int \ln x \, \mathrm{d}x$,

b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}} \, \mathrm{d}x$ (mit der Substitution $u = \sqrt{x+1}$),

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+4)^2} \, \mathrm{d}x$, indem Sie auf das Integral $\displaystyle\int 1 \cdot \frac{1}{x^2+4} \, \mathrm{d}x$ partielle Integration anwenden.

Aufgabe 8 (11 Punkte): Gegeben ist $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto (x^2 - y^2) \ln x$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Untersuchen Sie in jedem der kritischen Punkte, ob ein Minimum, Maximum oder ein Sattelpunkt vorliegt.