4 Konvergenz

4.1 Abstände

4.1 Definition: Sei M nichtleere Menge. Eine **Metrik** oder ein **Abstand** auf M ist eine Abbildung $d : M \times M \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(M1) $\forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0 \wedge \forall x, y \in M : \big(d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y\big)$ (Positivität, Definitheit).

(M2) $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie).

(M3) $\forall x, y, z \in M : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecks-Ungleichung, Δ-Ungleichung).

(M, d) heißt **metrischer Raum**.

4.2 Satz: Ist $(V, \|.\|)$ ein normierter Vektorraum, dann ist

$$d(x, y) \;:=\; \|x - y\|$$

eine Metrik auf V.

4.3 Beispiele: **1)** Ist $(\mathbb{K}, |.|)$ ein bewerteter Körper (z.B. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), dann ist

$$d(x, y) \;:=\; |x - y|$$

eine Metrik auf $\mathbb{K}$.

2) Sei $V = \mathbb{R}^n$ oder $V = \mathbb{C}^n$. Aus Satz 4.2 und Beispielen zur Definition von Norm in 3.59

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &:= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2}, \\ d_1(x, y) &:= \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|, \\ d_\infty(x, y) &:= \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|, \\ d_p(x, y) &:= \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p\right)^{1/p} \quad \text{mit } 1 \leq p < \infty \end{aligned}$$

sind Metriken auf V. Je nach Anwendung kann eine andere Metrik passend sein.

3) Der Raum der $n \times n$-Matrizen $V = \mathcal{M}_{n,n} = \left\{ \big(a_{ij}\big)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} : a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$

$$\begin{aligned}
A + B &= \big(a_{ij}\big) + \big(b_{ij}\big) := \big(a_{ij} + b_{ij}\big) \\
\lambda \cdot A &= \lambda \cdot \big(a_{ij}\big) := \big(\lambda a_{ij}\big) \\
A \cdot B &= \big(a_{ij}\big) \cdot \big(b_{ij}\big) := \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{lj} \right)_{i,j} \qquad \text{(Matrizenmultiplikation)} \\
\|A\| &= \big\|\big(a_{ij}\big)\big\| := n \max |a_{ij}| \quad \text{ist eine Norm} \\
\Rightarrow \ d(A,B) &= \big\|\big(a_{ij}\big) - \big(b_{ij}\big)\big\| \quad \text{ist eine Metrik auf } \mathcal{M}_{n,n}
\end{aligned}$$

Spezialität:
$$\begin{aligned}
\|A \cdot B\| &\le n \max \sum_{l=1}^{n} |a_{il}\, b_{lj}| \\
&\le n^2 \max |a_{ij}| \max |b_{ij}| \\
&= \|A\| \, \|B\|
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt: $\big\|A^k\big\| \le \|A\|^k$ für $k \in \mathbb{N}$.

4) $V = C([a,b] \to \mathbb{R})$: Raum der auf $[a,b]$ stetigen reellwertigen Funktionen.

$$\begin{aligned}
\|f\|_\infty &:= \max_{a \le x \le b} |f(x)| \quad \text{ist Norm} \\
d(f,g) &:= \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)| \quad \text{ist Metrik auf } C([a,b] \to \mathbb{R})
\end{aligned}$$

5) Metrik auf einer beliebigen Menge: Sei $M \ne \emptyset$.

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \ne y \end{cases}$$

ist eine Metrik auf M.

4.4 Dreiecks-Ungleichung nach unten: Sei (M,d) ein metrischer Raum. Für $x, y, z \in M$ gilt

$$d(x,y) \ge \big| d(x,z) - d(z,y) \big|.$$

4.5 Definition: Sei (M,d) ein metrischer Raum, $x_0 \in M$ und $R \in \left]0, \infty\right[$. Dann heißt

$$B_R(x_0) := \big\{ x \in M : d(x,x_0) < R \big\}$$

offene Kugel um x_0 mit Radius R.

4.2 Folgen

4.6 Konvergenz: Sei (M,d) ein metrischer Raum, (x_n) eine Folge in M und $x \in M$.

1) (x_n) heißt **konvergent gegen $\boldsymbol{x}$**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir

$$x \;=\; \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x, \qquad x_n \to x \text{ für } n \to \infty, \qquad x_n \to x;$$

x heißt **Grenzwert** oder **Limes** der Folge (x_n).

2) (x_n) heißt **konvergent**, falls

$$\exists x \in M : x = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Ist eine Folge nicht konvergent, so heißt sie **divergent**.

3) (x_n) heißt **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m > N_\varepsilon : d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

4.7 Satz und Definition: Sei (M,d) ein metrischer Raum.

1) Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

2) Gilt umgekehrt: Jede Cauchy-Folge ist in M konvergent, dann heißt (M,d) **vollständig**.

4.8 Eindeutigkeit des Grenzwertes: Sei (M,d) ein metrischer Raum. Ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so besitzt (x_n) keinen weiteren Grenzwert.

4.9 Beispiele: **1)** $M = \mathbb{Q}$, $d(x,y) = |x-y|$:

$$x_n \to x \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N_\varepsilon : |x_n - x| < \varepsilon.$$

Dies ist der Konvergenzbegriff, den wir bereits kennen.
$(\mathbb{Q}, d)$ ist **nicht vollständig**.

2) $M = \mathbb{R}$ mit $d(x,y) = |x-y|$ ist vollständig (vgl. 2.30).

3) $M = \mathbb{C}$, $d(z,u) = |z-u|$. Es gelten (vgl. 2.54)

$$z_n \to z \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re} z_n \to \operatorname{Re} z \;\wedge\; \operatorname{Im} z_n \to \operatorname{Im} z$$

$$(z_n) \text{ ist Cauchy-Folge} \;\Leftrightarrow\; (\operatorname{Re} z_n), (\operatorname{Im} z_n) \text{ sind Cauchy-Folgen.}$$

Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, ist auch $\mathbb{C}$ vollständig.

4) $M = \mathbb{C}^n$, $d(z,u) := d_\infty(z,u) = \max\limits_{1\le j\le n} |z_j - u_j|$ ist vollständig:

Sei (z_m) Cauchy-Folge, $z_m = \begin{pmatrix} (z_m)_1 \\ \vdots \\ (z_m)_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \forall m,k > N_\varepsilon \quad \forall j = 1,\dots,n : |(z_m)_j - (z_k)_j| \le d_\infty(z_m, z_k) < \varepsilon \\
&\Rightarrow \quad \forall j = 1,\dots,n : ((z_m)_j)_{m\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge in } \mathbb{C} \\
&\Rightarrow \quad \forall j = 1,\dots,n : (z_m)_j \to u_j \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

Setze $u := \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; d(z_m,u) = \max\limits_{1\le j\le n} \big|(z_m)_j - u_j\big| \to 0 \;\Rightarrow\; z_m \to u$ in $(\mathbb{C}^n, d_\infty)$.

Entsprechend kann bewiesen werden: $(\mathbb{C}^n, d_p)$ ist vollständig (vgl. 4.3)

5) $V = \mathcal{M}_{n,n},\ d(A,B) = n \max |a_{ij} - b_{ij}|$:
Genauso wie 4): (V,d) ist vollständig.
Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ mit $\|A\| < 1$. Dann gilt $A^n \to 0$:

$$d(A^n, 0) = \|A^n - 0\| = \|A^n\| \le \|A\|^n \to 0.$$

6) $V = C([a,b] \to \mathbb{R}),\ d_\infty(f,g) = \max\limits_{a\le x\le b} |f(x) - g(x)|$: Später: (V, d_∞) ist vollständig.

4.10 Definition: Gilt für die **relle** Folge (a_n):

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : a_n > M$$

oder

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n > N : a_n < -M,$$

so heißt die Folge (a_n) **bestimmt divergent**. Man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ oder } a_n \to \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ oder } a_n \to -\infty.$$

Das bedeutet aber nicht, dass für solche Folgen ein Kovergenzbegriff definiert wird.

4.11 Beispiele: $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-n^{1/1000}\right) = -\infty$.
Die Folge $a_n = (-1)^n n$ ist nicht bestimmt divergent.

4.3 Reihen

4.12 Definition: Sei (a_k) eine Folge in einem normierten Vektorraum (z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$).

1) Die (unendliche) **Reihe** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet die Folge der **Partialsummen** $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, d.h.
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;:=\; (s_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \;=\; \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}.$$
Die Folgenglieder a_k heißen auch die **Summanden** der Reihe.

2) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **konvergent**, falls (s_n) konvergiert, sonst **divergent**.

3) Falls die Reihe konvergiert, schreibt man
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;:=\; \lim_{n\to\infty} s_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\,.$$

4) Eine relle Reihe (d.h. die Summanden sind reell) heißt **bestimmt divergent**, falls
$$\forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists N_K \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N_K : \sum_{k=0}^{n} a_k > K$$
(d.h. $s_n \to \infty$) bzw.
$$\forall K \in \mathbb{R} \;\; \exists N_K \in \mathbb{N} \;\; \forall n > N_K : \sum_{k=0}^{n} a_k < -K$$
(d.h. $s_n \to -\infty$). Schreibweise:
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \;=\; \infty \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \;=\; -\infty.$$

5) Genauso $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ mit $k_0 \in \mathbb{Z}$.

Achtung: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bzeichnet zwei verschiedene Dinge: **(i)** Die Teilsummenfolge (s_n),
(ii) den Grenzwert der Teilsummenfolge.

4.13 Bemerkung: Jede Folge kann als Reihe dargestellt werden:
$$x_n = \underbrace{x_1}_{=:a_1} + \underbrace{x_2 - x_1}_{=:a_2} + \underbrace{x_3 - x_2}_{=:a_3} + \ldots + \underbrace{x_n - x_{n-1}}_{=:a_n} \;\;\Rightarrow\;\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k = (x_n).$$

4.14 Beispiele: **1)** $a_k = 1:\ s_n = n+1,\ \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \infty$ (bestimmt divergent).

2) Die Geometrische Reihe: $a_k = q^k,\ q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \\ |q| < 1 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \\ |q| > 1 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k \text{ ist divergent} \\ q \in \mathbb{R} \wedge q > 1 &\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty \end{aligned}$$

3) Wichtigste divergente Reihe: **Harmonische Reihe** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$:

Aus $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{2m} \geq \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} + \ldots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2}$ folgt

$$\begin{aligned} s_{2^N} &= \sum_{k=1}^{2^N} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\ldots}_{\geq \frac{1}{2}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{N-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^{N-1}+2^{N-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} \\ &\geq 1 + \frac{N}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow\ s_n \geq 1 + \frac{N}{2}$ für $n \geq 2^N$ für beliebiges $N \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$

Sehr langsame Divergenz: $s_{1000} = 7,4\ldots;\ s_{10\,000} = 9,7\ldots$.

Auf jedem Taschenrechner konvergiert die harmonische Reihe.

4) Dezimalbrüche: $\pi = 3,14159\ldots$ bedeutet

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \qquad \text{mit } a_0 = 3,\ a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ \ldots.$$

Die Teilsummenfolge ist monoton: $s_{n+1} - s_n = \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \geq 0$

und beschränkt: $s_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{9}{10^k} \leq 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\,\frac{1}{1-\frac{1}{10}}.$

$\Rightarrow$ Konvergenz (vgl. Hauptsatz über monotone Folgen 2.38).

4.15 Elementare Eigenschaften: **1)** Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann sind auch $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda\, a_k$ konvergent mit

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k\\ \sum_{k=0}^{\infty} \lambda\, a_k &= \lambda \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k\end{aligned}$$

2) Cauchy-Kriterium: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe in einem vollständigen Vektorraum, dann ist sie genau dann konvergent wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m > N_\varepsilon : \quad \underbrace{\left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\|}_{=\|s_m - s_n\| = d(s_m, s_n)} < \varepsilon$$

3) Sind (a_k) und (b_k) Folgen, die sich nur an endlich vielen Stellen unterscheiden, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert. (Die Grenzwerte können verschieden sein.)

4) Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, dann ist $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Die Umkehrung gilt nicht: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.
Nullfolge-Kriterium: $\neg(a_n \to 0) \;\Rightarrow\; \sum a_k$ ist divergent.

5) Ist $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{N}$, und sind die Partialsummen beschränkt, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

4.4 Konvergenzkriterien für Reihen

4.16 Leibniz-Kriterium: Sei (a_k) in $\mathbb{R}$ eine positive, monoton fallende Nullfolge, d.h.

$$a_k \geq 0, \;\; a_k \geq a_{k+1} \text{ und } \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Dann ist die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\, a_k$ konvergent. und es gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\, a_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\, a_k \right| \;\leq\; a_{n+1}.$$

Beweis: Setze $s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, a_k$.

1) $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend:

$$s_{2(k+1)} - s_{2k} \;=\; a_{2k+2} - a_{2k+1} \;\leq\; 0$$

2) $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend: Genauso

3) Es gilt: $s_1 \;\leq\; s_{2k+1} \;=\; s_{2k} - a_{2k+1} \;\leq\; s_{2k} \;\leq\; s_0$.

$\Rightarrow$ $(s_{2k}), (s_{2k+1})$ sind monoton und beschränkt, also konvergent.
Wegen $s_{2k+1} - s_{2k} = -a_{k+1} \to 0$ gilt

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} \;=\; \lim_{k\to\infty} s_{2k+1} \;=:\; s.$$

$\Rightarrow$ (s_n) ist konvergent, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

4) Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} s_{2k-1} \leq s \leq s_{2k} \quad &\Rightarrow \quad |s - s_{2k-1}| = s - s_{2k-1} \leq s_{2k} - s_{2k-1} = a_{2k}, \\ s_{2k+1} \leq s \leq s_{2k} \quad &\Rightarrow \quad |s - s_{2k}| = s_{2k} - s \leq s_{2k} - s_{2k+1} = a_{2k+1}. \end{aligned}$$

□

4.17 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ ist konvergent (gegen $\ln 2$).

4.18 Definition: Die Reihe $\sum a_n$ heißt **absolut konvergent**, falls $\sum \|a_n\|$ konvergiert bzw. falls $\sum |a_n|$ konvergiert (wenn (a_n) reelle oder komplexe Folge). Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, heißt **bedingt konvergent**.

4.19 Beispiel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k}}{k}$ ist bedingt konvergent, denn $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

4.20 Satz: In einem vollständigen Vektorraum ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.

Beweis: Cauchy-Kriterium:

$$\|s_m - s_n\| \;=\; \left\| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right\| \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \;<\; \varepsilon \qquad \text{für } m \geq n > N_\varepsilon.$$

□

4.21 Majorantenkriterium: Es sei (a_n) eine Folge in einem vollständigen Vektorraum und (c_n) eine reelle Folge. Falls

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : \|a_n\| \leq c_n \;\wedge\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ konvergent},$$

dann konvergiert auch $\sum a_n$ absolut.

Die Reihe $\sum c_n$ heißt **Majorante** für $\sum a_n$.

Beweis: Cauchy-Kriterium:

$$\|s_m - s_n\| \;=\; \left\|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right\| \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{m} \|a_k\| \;\leq\; \sum_{k=n+1}^{m} c_k \;<\; \varepsilon \qquad \text{für } m \geq n > N_\varepsilon.$$

□

4.22 Minorantenkriterium: Sind $(a_n), (c_n)$ **relle** Folgen, und gilt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : a_n \geq c_n \geq 0 \;\wedge\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \infty,$$

dann ist $\sum a_n$ bestimmt divergent: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$.

4.23 Beispiele: **1)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n + 3^n}$ konvergiert absolut wegen

$$\frac{1}{2^n + 3^n} \leq \frac{1}{3^n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \text{ (konvergent).}$$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$ wegen $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n}$ konvergiert absolut wegen

$$\frac{n}{4^n} \;=\; \frac{n}{2^n (1+1)^n} \;\overset{\text{Bernoullie Ungl.}}{\leq}\; \frac{n}{2^n\, n} \;=\; \frac{1}{2^n} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}.$$

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert wegen $\displaystyle\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ für $k \geq 2$ und

$$\begin{aligned} \frac{1}{k(k-1)} \;&=\; \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ \Rightarrow \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \;&=\; \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \;=\; 1 - \frac{1}{n} \;\to\; 1. \end{aligned}$$

4.24 Wurzelkriterium: Es sei (a_n) eine Folge in einem vollständigen Vektorraum.

1) Falls es ein q mit $0 \le q < 1$ gibt, so dass

$$\forall n \ge n_0 : \sqrt[n]{\|a_n\|} \le q$$

(für irgendein $n_0 \in \mathbb{N}$), dann ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.
Aus $\sqrt[n]{\|a_n\|} \ge 1$ für $n \ge n_0$ folgt Divergenz.

2) Falls die Folge $\left(\sqrt[n]{\|a_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, setze

$$q \ := \ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|a_n\|}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} q < 1 \ &\Rightarrow \ \sum a_n \text{ konvergiert absolut,} \\ q > 1 \ &\Rightarrow \ \sum a_n \text{ divergiert,} \\ q = 1 \ &\Rightarrow \ \text{Mit Wurzelkriterium keine Aussage möglich.} \end{aligned}$$

Beweis: **1)** **a)** $\left.\begin{array}{l} \forall n \ge n_0 : \|a_n\| \le q^n \\ \sum q^n \text{ konvergent} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n$ absolut konvergent

b) $\|a_n\| \ge 1^n = 1$ für $n \ge n_0 \ \Rightarrow \ \neg(a_n \to 0) \Rightarrow \ \sum a_n$ divergent.

2) Sei $q < 1$. Setze $\varepsilon := \dfrac{1-q}{2} > 0. \Rightarrow$ Für $n > N_\varepsilon$ gilt $\sqrt[n]{\|a_n\|} < q + \varepsilon = \dfrac{q+1}{2} < 1.$ $\square$

4.25 Beispiel: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{4^n}$ konvergiert absolut wegen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{4^n}} \ = \ \lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{4} \ = \ \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} (n^{1/n}) \ \overset{\text{siehe unten}}{=} \ \frac{1}{4} \ < \ 1.$$

4.26 Satz: Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$.

Beweis: $n > 1 \ \Rightarrow \ n^{1/n} > 1$.
Setze $\delta_n := n^{1/n} - 1 \ \Rightarrow \ n^{1/n} = 1 + \delta_n, \ \delta_n > 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ n \ = \ (1+\delta_n)^n \ = \ \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{j} \delta_n^j \, 1^{n-j}}_{\ge 0} \ \ge \ \binom{n}{2} \delta_n^2 \ = \ \frac{n(n-1)}{2} \delta_n^2 \\ &\Rightarrow \ \delta_n^2 \ \le \ \frac{2n}{n(n-1)} \ \to \ 0 \\ &\Rightarrow \ \delta_n \ \to \ 0 \\ &\Rightarrow \ n^{1/n} \ = \ 1 + \delta_n \ \to \ 1 \end{aligned}$$

$\square$

4.27 Quotientenkriterium: Sei (a_n) eine relle oder komplexe Folge mit $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$.

1) Falls es ein q mit $0 \leq q < 1$ gibt mit

$$\forall n \geq n_0 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q,$$

dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Aus $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für $n \geq n_0$ folgt Divergenz.

2) Falls die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ konvergiert sei $q := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} q < 1 &\;\Rightarrow\; \sum a_n \text{ konvergiert absolut,} \\ q > 1 &\;\Rightarrow\; \sum a_n \text{ divergiert,} \\ q = 1 &\;\Rightarrow\; \text{Mit Quotientenkriterium keine Aussage möglich.} \end{aligned}$$

4.28 Beispiele: **1)** $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ ist absolut konvergent für $|z| < 1$ und divergent für $|z| \geq 1$:

$$\begin{aligned} \text{Wurzelkriterium:} \quad & \sqrt[n]{|n^2 z^n|} = \sqrt[n]{n^2}\,|z| = \left(n^{1/n}\right)^2 |z| \to |z|, \\ \text{Quotientenkriterium:} \quad & \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)^2 |z|^{n+1}}{n^2 z^n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 |z| \to |z| \end{aligned}$$

Für $|z| = 1$: $|n^2 z^n| = n^2 \to \infty \;\Rightarrow\; \neg(n^2 z^n \to 0) \;\Rightarrow\; \sum n^2 z^n$ ist divergent.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{Quotientenkriterium:} \quad \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = |z|\frac{1}{n+1} \to 0.$$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent, und $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \to 1$ bzw. $\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \to 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent, und $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$ bzw. $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \to 1$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2+(-1)^n)^n}{4^n}$ ist absolut konvergent:

$$\text{Wurzelkriterium:} \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n}} = \frac{3}{4} & \text{für gerades } n, \\ \sqrt[n]{\frac{1^n}{4^n}} = \frac{1}{4} & \text{für ungerades } n. \end{cases} \quad \Rightarrow \text{absolute Konv.}$$

Aber Quotientenkriterium: $\displaystyle \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{1}{4\cdot 3^{n+1}} & \text{für gerades } n \\ \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{3^{n+1}}{4} & \text{für ungerades } n \end{cases}$

Mit dem Quotientenkriterium ist keine Aussage möglich!

Das Wurzelkriterium ist stärker als das Quotientenkrtiterium (ohne Beweis).

4.29 Produkt von Reihen: Es seien $\sum a_n$ und $\sum b_n$ absolut konvergent und

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j}.$$

Dann konvergiert das **Cauchy-Produkt** $\sum c_n$ absolut, und für die Grenzwerte gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

4.30 Beispiele: **1)** $\displaystyle \frac{1}{(1-q)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)$, Reihe ist für $|q| < 1$ absolut konvergent.

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} q^j\, q^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} q^n = (n+1)q^n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\, q^{n-1}.$$

2) $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ ist bedingt konvergent.

Cauchy-Produkt mit sich selber:

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}} \frac{(-1)^{n-j}}{\sqrt{n-j+1}} = (-1)^n \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{j+1}\,\sqrt{n-j+1}}.$$

Die Produktreihe $\sum c_n$ ist divergent:

Für festes $n \in \mathbb{N}$ betrachte

$$\begin{aligned} f(x) &= x(n+2-x) \\ &= -\underbrace{\left(x^2 - (n+2)x + \left(\frac{n+2}{2}\right)^2\right)}_{=(x-\frac{n+2}{2})^2 \le 0} + \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \le \left(\frac{n+2}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ für $0 < x < n+2$ gilt $\displaystyle \frac{1}{f(x)} \ge \left(\frac{2}{n+2}\right)^2$ bzw. $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \ge \frac{2}{n+2}$

$\displaystyle \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{j+1}\,\sqrt{n-j+1}} = \frac{1}{\sqrt{f(j+1)}} \ge \frac{2}{n+2}$

$$\Rightarrow \ |c_n| \geq \sum_{j=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2}$$
$$\Rightarrow \ \neg(c_n \to 0)$$
$$\Rightarrow \ \sum c_n \text{ ist divergent.}$$

4.5 Potenzreihen

4.31 Definition: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und (a_n) eine komplexe Folge. Dann heißt

$$f(z) \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Potenzreihe um z_0 mit den Koeffizienten a_n. Falls $z, z_0 \in \mathbb{R}$ und (a_n) reelle Folge, so heißt die Potenzreihe **reell**.

4.32 Beispiel:

$$\frac{1}{2-z} \ = \ \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} \ = \ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^n \qquad \text{für } \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \text{ bzw. } |z| < 2$$

oder

$$\frac{1}{2-z} \ = \ \frac{1}{1-(z-1)} \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \qquad \text{für } |z-1| < 1$$

4.33 Konvergenzradius: Sei $\sum a_n \, (z - z_0)^n$ Potenzreihe.

1) Es gibt eine eindeutig bestimmte „Zahl" $R \in [0, \infty]$, so dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n \text{ ist } \begin{cases} \text{absolut konvergent} & \text{für } |z - z_0| < R, \\ \text{divergent} & \text{für } |z - z_0| > R. \end{cases}$$

(Für $|z - z_0| = R$ kann alles passieren.) Die Größe R heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe.

2) Falls

$$r := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \qquad \text{oder} \qquad r := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

existiert oder $r = \infty$ (bestimmte Divergenz), so gilt

$$R \ = \ \begin{cases} \frac{1}{r} & \text{falls } r > 0 \\ \infty & \text{falls } r = 0 \\ 0 & \text{falls } r = \infty \end{cases}$$

Im Allgemeinen: $r = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ (Limes superior = größter durch Teilfolge erreichbarer Grenzwert), R wie oben.

Beweis: Sei $z_0 = 0$. Zum Beweis von 2) wende das Wurzelkriterium an:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|a_n\, z^n|} &= \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| \overset{n\to\infty}{\to} \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)|z| \overset{\text{soll sein}}{<} 1 \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} |z| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{falls } \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 0 \\ z \text{ beliebig} & \text{falls } \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Genauso: Anwendung des Quotientenkriteriums liefert die andere Formel für den Konvergenzradius.

□

4.34 Beispiele: **1)** $\sum \frac{z^n}{n!}$: $a_n = \frac{1}{n!} \;\Rightarrow\; \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \to 0 \;\Rightarrow\; R = \infty.$

2) $\sum n^2\, z^n$: $R = 1$, Reihe ist konvergent für $|z| < 1$, divergent für $|z| \geq 1$ (vgl. Beispiel auf Seite 116).

3) $\sum \frac{2^n}{n^2}(z-1)^n$: $a_n = \frac{2^n}{n^2} \;\Rightarrow\; \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{(n+1)^2}\, 2 \to 2$

$\Rightarrow R = \frac{1}{2}$, also: absolute Konvergenz für $|z-1| < \frac{1}{2}$
Divergenz für $|z-1| > \frac{1}{2}$

Für $|z-1| = \frac{1}{2}$: $\left|\frac{2^n}{n^2}\,(z-1)^n\right| = \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ Konvergenz (Majo-Kriterium 4.21).

4) Geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = \frac{1}{1+z^2}.$$

Also $R = 1$. Die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ hat in $z = \pm i$ eine Singularität (Nennernullstelle). Deshalb kann der Konvergenzradius nicht größer sein.

5) $\sum (3 + (-1)^n)^n\, z^n$: $\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 2, & n \text{ ungerade} \\ 4, & n \text{ gerade} \end{cases} \quad \Rightarrow R = \frac{1}{4}.$

4.35 Identitätssatz: Seien $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ und $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\,(z-z_0)^n$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien. Existiert eine Folge (z_k) mit $z_k \to z_0$, $z_k \neq z_0$ und $f(z_k) = g(z_k)$ für $k \in \mathbb{N}$, so folgt $a_n = b_n$, also auch $f = g$.

Insbesondere ist jede Funktion auf höchstens eine Weise als Potenzreihe um z_0 darstellbar.

4.36 Multiplikation: Seien

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit Konvergenzradius } R_1 > 0 \text{ und } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \text{ mit } R_2 > 0.$$

Dann gilt wenigstens für $|z - z_0| < \min\{R_1, R_2\}$:

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \text{mit } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Beweis: $f(z), g(z)$ sind absolut konvergent für $|z| < \min\{R_1, R_2\}$. Aus Satz 4.29 (Cauchy-Produkt von Reihen): Für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \min\{R_1, R_2\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z)\, g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \widetilde{c}_n, \\ \widetilde{c}_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k b_{n-k} (z - z_0)^{n-k} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \end{aligned}$$

□

4.6 Spezielle Funktionen

4.37 Definition: Wir setzen:

$$\begin{aligned} e^z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} && \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \ln z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1} && \text{für } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - 1| < 1, \\ \sin z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} && \text{für } z \in \mathbb{C}, \\ \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} && \text{für } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

4.38 Eigenschaften: **1)** $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ für $z, w \in \mathbb{C}$, insbesondere gilt $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Weiter gilt $e^0 = 1$, $e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, $\quad e^{1/2} \cdot e^{1/2} = e^1 = e \wedge e^{1/2} > 0 \Rightarrow e^{1/2} = \sqrt{e}$.
Mit Induktion folgt $e^q = q$-te Potenz von e für $q \in \mathbb{Q}$.

2) Später: Die reelle Exponentialfunktion $e^{(\cdot)} : \mathbb{R} \to]0, \infty[: x \mapsto e^x$ ist bijektiv. Die Umkehrabbildung stimmt für $|x - 1| < 1$ mit der oben definierten Logarithmusfunktion überein, d.h. es gilt $\ln(e^x) = x = e^{\ln x}$.

3) $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$.

4) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (Eulersche Formel) bzw.

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \qquad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z.$$

Insbesondere gilt die Formel von Moivre:

$$(\cos z + i \sin z)^n = \left(e^{iz}\right)^n = e^{inz} = \cos(nz) + i \sin(nz) \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

5) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Insbesondere $\left|e^{it}\right| = 1$ für $t \in \mathbb{R}$.

6) Additionstheoreme: $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2$,
$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2$

7) Später: Für $z = x \in \mathbb{R}$ stimmen $\sin x$, $\cos x$ mit der rellen (bereits bekannten) Sinus- bzw. Cosinusfunktion überein. Daraus folgt:

a) Die Abbildung $[0, 2\pi[\, \ni t \mapsto e^{it}$ parametrisiert den Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Insbesondere gilt $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i3\pi/2} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$.

b) Die komplexe Exponentialfunktion $e^{(\cdot)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto e^z$ hat die Periode $2\pi i$:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}.$$

c) Die komplexe Sinus- und Cosinusfunktion haben die Periode 2π:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z \qquad \text{für } z \in \mathbb{C}, \text{ insbesondere für } z \in \mathbb{R}.$$

4.39 Definition: Sei $V = \mathcal{M}_{n,n}$ der vollständige Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit Norm $\|A\| = \|(a_{ij})\| = n \max\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|$. Wir setzen

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad \text{für } A \in \mathcal{M}_{n,n} \quad \text{mit } A^0 := E_n \text{ (Einheitsmatrix)}$$

(Exponentialfunktion für Matrizen). Dann gilt

$$\left\|e^A\right\| \le e^{\|A\|}.$$

Weiter sind die Sinus- und Cosinusfunktionen definiert durch

$$\sin(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} \quad \text{für } A \in \mathcal{M}_{n,n}$$
$$\cos(A) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A^{2n} \quad \text{für } A \in \mathcal{M}_{n,n}$$

4.40 Eigenschaften: **1)** $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ für $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}$, insbesondere gilt $e^{-A} = \left(e^A\right)^{-1}$.

2) $\sin(-A) = -\sin A$, $\cos(-A) = \cos A$.

3) $e^{iA} = \cos A + i \sin A$

4.41 Beispiele: **1)** $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \frac{\lambda_1^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum \frac{\lambda_2^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e & \lambda\, e \\ 0 & e \end{pmatrix}$ (Übungen).

4.42 Die geometrische Reihe für Matrizen: Für $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ mit $\|A\| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (E - A)^{-1} \qquad \text{(Neumannsche Reihe).}$$

5 Stetigkeit

5.1 Um was gehts?

5.1 Definition und Satz: Seien (E, d_E) und (F, d_F) metrische Räume und $f : E \supseteq D \to F$, $x_0 \in D$ (D = Definitionsbereich von f). Dann heißt f **stetig in $\boldsymbol{x_0}$**, falls

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D : d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

(ε-δ-Kriterium für Stetigkeit)

oder äquivalent

(ii) Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to f(x_0)$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\Big(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\Big)$

(Folgenkriterium für Stetigkeit).

f heißt **stetig**, falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Zur Äquivalenz: (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei (x_n) Folge in D mit $x_n \to x_0$.
Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$, so dass gilt: $\quad d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.
Wähle N_δ mit $d_E(x_n, x_0) < \delta$ für $n > N_\delta$. Für $n > N_\delta$ folgt $d_F(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$
$\Rightarrow \quad f(x_n) \to f(x_0)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Zeige $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii):
$\neg$(i) $\Leftrightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in D : d_E(x, x_0) < \delta \ \wedge \ d_F(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$
Für $n \in \mathbb{N}$ wähle $\delta_n := \frac{1}{n}$: $\ \exists x_n \in D : d_E(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \ \wedge \ d_F(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$
$\Rightarrow \quad x_n \to x_0 \ \wedge \ \neg\big(f(x_n) \to f(x_0)\big)$
$\Rightarrow \quad \neg$(ii),

5.2 Diskussion: **1)** Das Bild:

2) Konstante Funktionen sind stetig und $\mathrm{id} : E \to E : x \mapsto x$ ist stetig.
(Das sind die wichtigsten stetigen Funktionen.)

3) Heaviside Funktion, "Einschaltfunktion"

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

ist unstetig in $x_0 = 0$, sonst stetig.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

ist nirgends stetig.

5) Unglaublich, aber wahr: $D := \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R} : n \mapsto \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$ ist stetig.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ ist stetig.}$$

6) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x \cdot y$ ist stetig.

5.3 Rechenregeln für stetige Funktionen in Vektorräumen: Seien E, F Vektorräume über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $f, g : E \supseteq D \to F$ stetig in $x_0 \in D$. Dann gelten:

1) $f + g,\ \lambda f,\ \|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ sind stetig in x_0.

2) Ist $F = \mathbb{R}$ oder $F = \mathbb{C}$, so ist $f \cdot g : x \mapsto f(x)\, g(x)$ stetig in x_0.
Ist zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, so sind auch

$$\frac{1}{g} : x \mapsto \frac{1}{g(x)}, \quad \frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0.

3) Ist $F = \mathbb{C}$, so sind $\mathrm{Re}f$ und $\mathrm{Im}f$ stetig in x_0.

5.4 Anwendung: Aus 1): $C(\mathbb{R} \to \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ ist ein Vektorraum.

5.5 Komposition stetiger Funktionen: Sei f stetig in x_0, g stetig in $f(x_0)$, dann ist auch $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ stetig in x_0.

5.6 Beispiele: **1)** Polynom $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ ist stetig auf ganz $\mathbb{C}$.

2) P, Q Polynome, $D := \{z \in \mathbb{C} : Q(z) \neq 0\}$. Dann ist $\dfrac{P}{Q}$ stetig.

3) Seien $p, q \in \mathbb{N}$ fest. Später: $f : [0, \infty[\to [0, \infty[: x \mapsto x^{1/q}$ ist stetig.
Setze $g(y) := y^p \;\Rightarrow\; g \circ f : x \mapsto x^{p/q}$ ist stetig.

5.2 Stetige Funktionen sind gute Funktionen

5.7 Satz: Sei $f : E \supseteq D \to F$ stetig in $x_0 \in D$ und $f(x_0) \neq y_0$. Dann

$$\exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D : d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) \neq y_0.$$

5.8 Zwischenwertsatz von Bolzano: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auch jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ wenigstens einmal an. Insbesondere:

$$f(a) < 0 \;\wedge\; f(b) > 0 \;\Rightarrow\; \exists x \in]a, b[: f(x) = 0.$$

Beweisidee: Sei $f(a) < 0 < f(b)$.

Intervallschachtelung: Setze $a_0 := a,\; b_0 := b,\; x_0 := \dfrac{a_0 + b_0}{2}$

Falls $f(x_0) = 0$, sind wir fertig

$$\left.\begin{array}{l}\text{Falls } f(x_0) > 0\text{: Setze } a_1 := a_0,\; b_1 := x_0 \\ \text{Falls } f(x_0) < 0\text{: Setze } a_1 := x_0,\; b_1 := b_0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f(a_1) < 0 < f(b_1) \\ b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}.\end{array}$$

Führe Verfahren fort. Dann Nullstelle in endlich vielen Schritten oder $a_n \to x$ mit $f(x) = 0$.

5.9 Diskussion: **1)** Dazu wichtig: $[a, b]$ hat keine Löcher, also Vollständigkeit.

2) Beweis gibt iteratives Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle.

3) Es folgt: Jedes Polynom ungerader Ordnung hat mindestens eine reelle Nullstelle:

$$\frac{P(x)}{a_n} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{a_n} = \underbrace{x^n}_{\substack{> 0 \text{ für } x > 0 \\ < 0 \text{ für } x < 0}} \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \ldots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}_{\to 1 \text{ für } x \to \pm\infty}$$

$$\Rightarrow \;\; \exists x_1, x_2 \in \mathbb{R} : f(x_1) < 0 < f(x_2).$$

Der Zwischenwertsatz garantiert nun die Existenz mindestens eines $x \in \mathbb{R}$ mit $\dfrac{P(x)}{a_n} = 0$, also $P(x) = 0$.

5.10 Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a,b]$ das Maximum und Minimum an, d.h.

$$\exists x_1, x_2 \in [a,b] \quad \forall x \in [a,b] : f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$

Verallgemeinerung: Ist $f : D \to F$ stetig und $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen, dann nimmt f auf D das Maximum und Minimum an.

Beweisidee: Sei $M := \sup\{f(x) : a \le x \le b\}$ (eventuell $M = \infty$). Wähle Folge (x_n) in $[a,b]$ mit $f(x_n) \to M$.
Diese Folge besitzt eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die in $[a,b]$ konvergiert: $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$ für $k \to \infty$ (ohne Beweis).

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_{n_k}) \to M & \text{für } k \to \infty \\ f(x_{n_k}) \to f(x_0) & \text{für } k \to \infty \end{cases} \Rightarrow M = f(x_0), \text{ insbesondere } M < \infty.$$

5.11 Beispiele: **1)** $f : [-1,2] \to \mathbb{R} : x \mapsto (x-1)(x-2)$: $f(3/2) \le f(x) \le f(-1)$ für $x \in [-1,2]$.

2) $f :]0,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$: Weder Minimum noch Maximum wird angenommen.

3) $f : [1,4] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 3 & \text{für } x = 1 \\ x & \text{für } 1 < x < 4 \\ 2 & \text{für } x = 4 \end{cases}$: Weder Minimum noch Maximum wird angenommen.

5.12 Folgerung: Sei F normierter Vektorraum und $f : \mathbb{R} \supset [a,b] \to F$ stetig. Dann ist f **beschränkt**, das heißt

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b] : \|f(x)\| \le K.$$

Beweis: Setze $g(x) := \|f(x)\| \;\Rightarrow\; g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist stetig.
$\Rightarrow\; \exists x_1, x_2 \in [a,b] : g(x_1) \le g(x) = \|f(x)\| \le g(x_2)$, d.h. $g(x_2)$ ist obere Schranke für $\|f(x)\|$. $\square$

5.3 Umkehrfunktionen

5.13 Definition: $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend** (streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend), falls

$$\forall x, y \in D : x < y \;\Rightarrow\; f(x) \le f(y) \quad (f(x) < f(y),\; f(x) \ge f(y),\; f(x) > f(y)).$$

5.14 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$ ist monoton wachsend und monoton fallend.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x$ ist streng monoton wachsend.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x \text{ für } x < 1, \\ 1 \text{ für } 1 \leq x \leq 2, \\ x \text{ für } x > 2, \end{cases}$
ist monoton wachsend.

5.15 Satz: Es sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Dann ist f injektiv.

Beweis: Sei f streng monoton wachsend.

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{lll} \text{Entweder} & x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; & f(x_1) < f(x_2) \\ \text{oder} & x_1 > x_2 \;\Rightarrow\; & f(x_1) > f(x_2) \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

$\square$

5.16 Satz: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann bildet f das Intervall $[a, b]$ bijektiv auf das Intervall $[f(a), f(b)]$ ab. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ ist stetig und streng monoton wachsend.
Analog für streng monoton fallende Funktionen $f : [a, b] \to [f(b), f(a)]$ und auch für offene Intervalle.

Beweis: **1)** f streng monoton wachsend $\Rightarrow$ f injektiv $\wedge$ $f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)]$.
Da f stetig, folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass f surjektiv ist.
$\Rightarrow$ f bijektiv.

2) f^{-1} ist streng monoton wachsend: Sei $y_1 < y_2$ mit $y_j = f(x_j)$.
Annahme: $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$
$\Rightarrow$ $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) = x_2$ $\Rightarrow$ $y_1 = f(x_1) \geq f(x_2) = y_2$ ↯

3) f^{-1} ist stetig: Seien $y_0 = f(x_0)$ und $\varepsilon > 0$ fest. Wegen der strengen Monotonie gilt $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$. Wähle nun $\delta > 0$ so klein, dass $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) - \delta$ und $f(x_0) + \delta < f(x_0 + \varepsilon)$. Für $|y - y_0| < \delta$ gilt nun

$$\begin{aligned} y \in \,]f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta[\;\subseteq\; [f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)] = f([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]) \\ \Rightarrow\; f^{-1}(y) \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \;\Rightarrow\; |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

5.17 Bemerkungen: **1)** $f^{-1} \neq \dfrac{1}{f}$.

2) Graph von $x = f^{-1}(y)$: derselbe wie der von $y = f(x)$.
Graph von $y = f^{-1}(x)$: Spiegelung des Graphen von $y = f(x)$ an $y = x$.

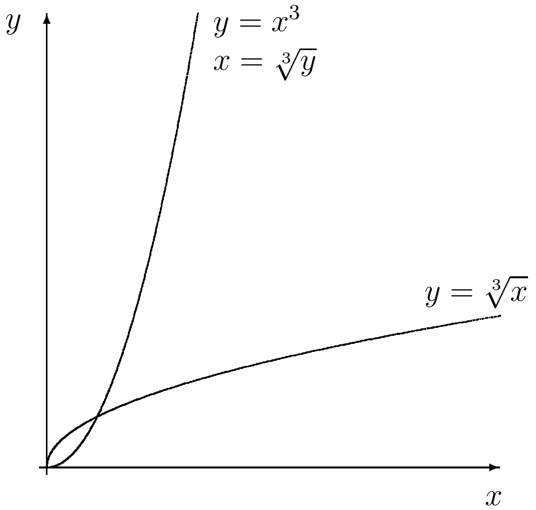
5.18 Wurzelfunktionen: Für festes $n \in \mathbb{N}$ sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto x^n$.

1) f ist stetig.

2) f ist streng monoton wachsend.

3) f ist surjektiv.

Also existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Wie oben: f^{-1} ist stetig und streng monoton wachsend.



Allgemeiner folgt:

$$\text{Für jedes } q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q \geq 0 \text{ ist } f : [0, \infty[\to [0, \infty[: x \mapsto x^q \text{ stetig.}$$
$$\text{Für jedes } q \in \mathbb{Q} \text{ mit } q < 0 \text{ ist } f :]0, \infty[\to]0, \infty[: x \mapsto x^q \text{ stetig.}$$

5.4 Stetigkeit von Grenzfunktionen

5.19 Beispiele für Funktionenfolgen: **1)** Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{2n}$.

Die Folge $\big(f_n(x)\big)_n$ konvergiert nicht für alle $x \in D = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |x| < 1 &\;\Rightarrow\; f_n(x) \to 0 \\ |x| = 1 &\;\Rightarrow\; f_n(x) \to 1 \\ |x| > 1 &\;\Rightarrow\; f_n(x) \to \infty \end{aligned}$$

2) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^{2n}}$.

$\big(f_n(x)\big)_n$ konvergiert für $n \to \infty$ in jedem Punkt $x \in D = \mathbb{R}$.
Wir setzen $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in D$.

$$\Rightarrow \ f(x) \ = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & |x| = 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

Alle f_n sind stetig, aber f nicht.

3) Sei $f_n : [-2, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{n}\, x$.

Für jedes $x \in D = [-2, 2]$ gilt $f_n(x) \to 1$.

Alle f_n sind stetig, und die Grenzfunktion $f : x \mapsto 1$ auch.

5.20 Definition: Seien $f, f_n : E \supseteq D \to F$ Funktionen.

1) Die Folge (f_n) heißt **punktweise konvergent gegen $\boldsymbol{f}$**, falls $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$, d.h.

$$\forall x \in D \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \underbrace{N_\varepsilon \in \mathbb{N}}_{N_\varepsilon \text{ darf von } x \text{ abhängen}} \ \ \forall n > N_\varepsilon : d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

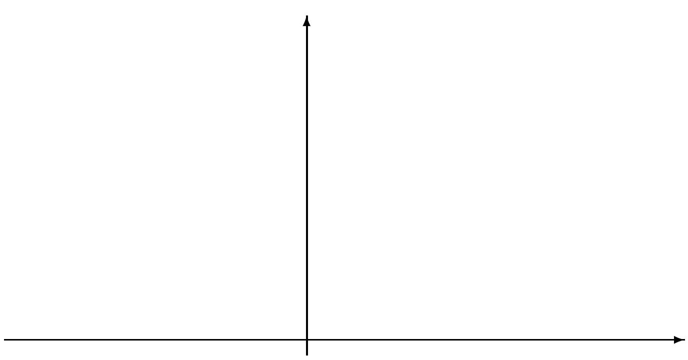
2) Die Folge (f_n) heißt **gleichmäßig konvergent gegen $\boldsymbol{f}$** (auf D), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N_\varepsilon \ \ \forall x \in D : \underbrace{d_F(f_n(x), f(x)) < \varepsilon}_{\text{gilt unabhängig von } x}.$$

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ punktweise/gleichmäßig; f heißt **Grenzfunktion** der Folge (f_n).

5.21 Diskussion: **1)** $f_n \to f$ gleichmäßig bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall n > N_\varepsilon : \text{Der Graph von } f_n \text{ liegt im } \varepsilon\text{-Schlauch um } f$$



2) Beispiel 1: nicht punktweise konvergent, nicht gleichmäßig konvergent.

Beispiel 2: punktweise konvergent, aber nicht gleichmäßig konvergent.

Beispiel 3: punktweise und gleichmäßig konvergent.

3) gleichmäßig konvergent $\Rightarrow$ punktweise konvergent.
Aber „gleichmäßig konvergent“ ist wesentlich mehr als „punktweise konvergent“.

4) Rechenregeln für konvergente Folgen übertragen sich auf Funktionenfolgen.

5) Reihen: Eine Reihe (bzw. die Folge der Partialsummen) kann punktweise oder gleichmäßig konvergieren, bedingt oder absolut.

5.22 Satz: Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig:

$$f_n \text{ stetig für } n \in \mathbb{N} \ \wedge \ f_n \to f \text{ gleichmäßig } \ \Rightarrow \ f \text{ ist stetig.}$$

Beweis: Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ fest. Wähle N_ε, so dass

$$d_F\big(f_n(x), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für } n > N_\varepsilon,\ x \in D.$$

Da $f_{N_\varepsilon+1}$ stetig ist, kann $\delta > 0$ so gewählt werden, dass

$$d_F\big(f_{N_\varepsilon+1}(x), f_{N_\varepsilon+1}(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{für } d_E(x, x_0) < \delta.$$

Für $d_E(x, x_0) < \delta$ folgt

$$\begin{aligned} d_F(f(x), f(x_0)) \ &\leq \ d_F\big(f(x), f_{N_\varepsilon+1}(x)\big) + d_F\big(f_{N_\varepsilon+1}(x), f_{N_\varepsilon+1}(x_0)\big) + d_F\big(f_{N_\varepsilon+1}(x_0), f(x_0)\big) \\ &< \ \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \ = \ \varepsilon. \end{aligned}$$

□

5.23 Kriterien für gleichmäßige Konvergenz: **1)** Cauchy-Kriterium: Sei (F, d_F) ein vollständiger metrischer Raum. Falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall n, m > N_\varepsilon \ \ \forall x \in D : d_F(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon,$$

dann existiert eine Funktion $f : D \to F$ mit $f = \lim f_n$ gleichmäßig.

2) **Weierstraß-Kriterium:** Falls F vollständiger Vektorraum und (c_n) reelle Folge mit $c_n \geq 0$ und

$$\sum c_n < \infty \text{ und } \|f_n(x)\| \leq c_n \text{ für } x \in D,\ n \geq n_0,$$

dann konvergieren $\sum f_n$ und $\sum \|f_n\|$ gleichmäßig auf D.

Beweis: **1)** Wir betrachten nur den Fall $F = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$. Der allgemeine Fall wird entsprechend bewiesen.

Für festes $x \in D$ ist $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. also konvergent.

Definiere $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in D$.

Aus $\big|f_n(x) - f_m(x)\big| < \varepsilon$ für $m, n > N_\varepsilon$ und $x \in D$ folgt (mit Satz 2.55)

$$|f_n(x) - f(x)| \;=\; \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \;\leq\; \varepsilon \qquad \text{für } n > N_\varepsilon,\ x \in D.$$

2) Wir zeigen, dass die Teilsummenfolge (s_n) das Cauchy-Kriterium aus 1) erfüllt:

Mit $s_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ gilt

$$\begin{aligned} \|s_n(x) - s_m(x)\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{n} f(x) \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|f(x)\| \\ &\leq \sum_{k=m+1}^{n} c_k \;<\; \varepsilon \qquad \text{für } n > m > N_\varepsilon. \end{aligned}$$

Also konvergiert (s_n) gleichmäßig gegen f mit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

$\square$

5.24 Beispiele: **1)** Die geometrische Reihe:

Bekannt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ punktweise für $|z| < 1$.

a) Sei $0 < q < 1$, q fest. Dann ist $\sum z^n$ gleichmäßig konvergent für $|z| \leq q$.

b) Aber: Auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist $\sum z^n$ nicht gleichmäßig konvergent.

2) Sei $f_n :]-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$. f_n ist stetig und es gilt

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{punktweise.}$$

Die Grenzfunktion ist unstetig, also konvergiert (f_n) nicht gleichmäßig auf $]-1,1]$.

5.25 Potenzreihen: Es sei $\sum a_n\,(z-z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in]0,\infty]$. Dann gilt:

1) Ist $\rho \in]0,R[$, so konvergiert die Potenzreihe in $\{z : |z-z_0| \leq \rho\}$ gleichmäßig.

2) Die Grenzfunktion $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ für $|z-z_0| < R$ ist stetig.

Beweis: **1)** Weierstraß-Kriterium: $|a_n(z-z_0)^n| \leq |a_n|\rho^n$, $\sum |a_n\,\rho^n|$ ist konvergent.

2) Sei $|z_1 - z_0| < R \;\Rightarrow\; \exists \rho \in]0, R[: |z_1 - z_0| < \rho$.
Aus 1) und Satz 5.22:
f ist stetig in der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$, also insbesondere in $z = z_1$. $\square$

5.26 Anwendung: **1)** Die Funktionen $\mathrm{e}^{(\cdot)}$, $\sin$, $\cos$ sind stetig auf $\mathbb{C}$.

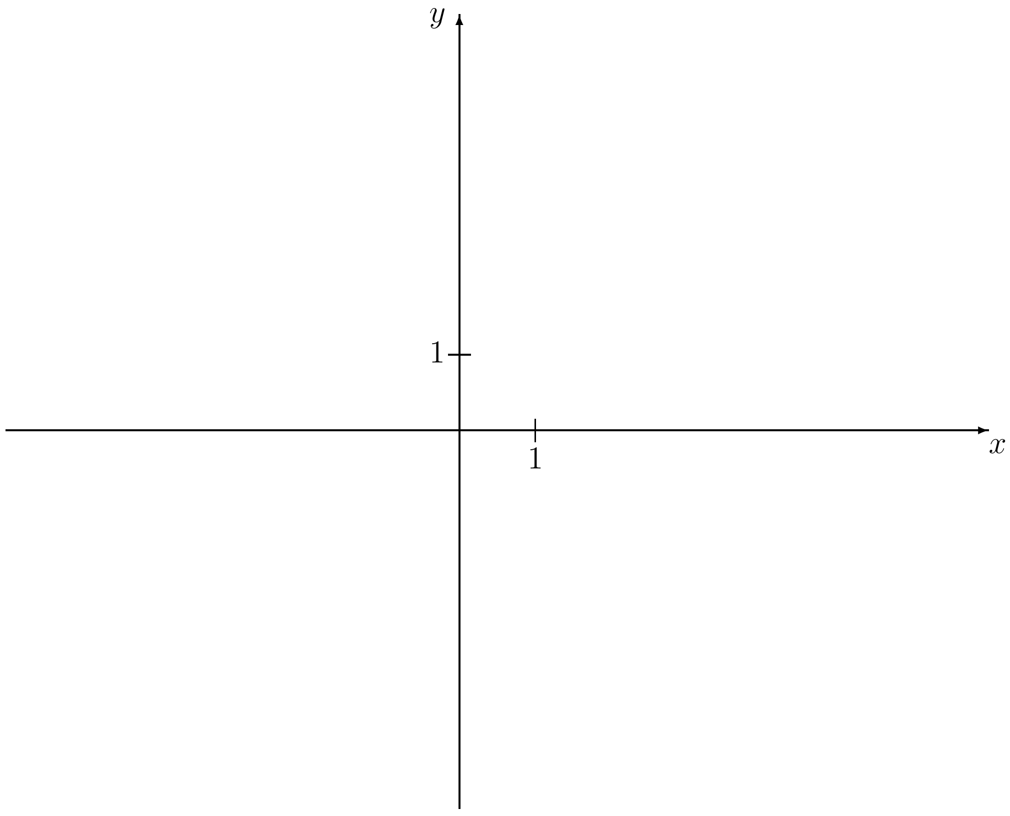
2) Die Funktion ln ist stetig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$.

3) Für $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ ist die Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{e}^{t\cdot A} \in \mathcal{M}_{n,n}$ stetig auf $\mathbb{R}$.

5.27 Der relle Logarithmus: Für die Funktion $\mathrm{e}^{(\cdot)} :]-\infty, \infty[\to]0, \infty[$ gelten:

(i) $\mathrm{e}^{(\cdot)}$ ist stetig.
(ii) $\mathrm{e}^{(\cdot)}$ ist streng monoton wachsend, insbesondere injektiv.
(iii) $\mathrm{e}^{(\cdot)}$ ist surjektiv.

Also existiert eine Umkehrfunktion $\ln :]0, \infty[\to]-\infty, \infty[$. Sie ist stetig und streng monoton wachsend.



5.5 Grenzwerte von Funktionen

5.28 Beispiele: **1)** Heaviside-Funktion:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Für x von oben gegen 0 „strebt“ $h(x)$ gegen 1

Für x von unten gegen 0 „strebt“ $h(x)$ gegen 0

2) Sei $f : \mathbb{R} \supset \mathbb{Z} : n \mapsto n$. Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ ist nicht sinnvoll.

5.29 Häufungspunkte: Sei (E, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq E$, $x_0 \in E$. Dann heißt x_0 **Häufungspunkt** von M, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \big(B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}\big) \cap M \neq \emptyset$$

oder äquivalent

$$\exists (x_n) : x_n \in M \wedge x_n \neq x_0 \wedge x_n \to x_0.$$

$x_0 \in M$ heißt **isolierter Punkt** von M, falls x_0 kein Häufungspunkt von M ist.

5.30 Definition: Sei $f : E \supseteq D \to F$ und $x_0 \in E$.

1) Schreibe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

falls x_0 Häufungspunkt von D ist und für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a. \tag{$*$}$$

2) Im Fall $f : \mathbb{R} \supseteq D \to F$ schreibe

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = a \quad \Big(\text{oder } \lim_{x \to x_0+} f(x) = a\Big),$$

falls x_0 Häufungspunkt von $D \cap \,]x_0, \infty[$ ist und $(*)$ für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$, $x_n > x_0$ gilt.

Analog $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = a$.

3) Falls x_0 Häufungspunkt von D ist und für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \to x_0$ die Folge $(f(x_n))$ bestimmt gegen $+\infty$ $(-\infty)$ divergiert, schreibe

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \;=\; +\infty \;(-\infty) \qquad (\textbf{uneigentlicher Grenzwert}).$$

4) Alles analog für $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

5.31 Beispiele: $\lim\limits_{x\downarrow 0}\frac{1}{x}=\infty,\quad \lim\limits_{x\uparrow 0}\frac{1}{x}=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$

5.32 Bemerkungen: **1)** Die Rechenregeln für konvergente Folgen übertragen sich sinngemäß auf das Rechnen mit Grenzwerten.

2) Gilt $x_0\notin D$ und $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, so ist

$$\tilde f : D\cup\{x_0\}\to F : x\mapsto \begin{cases} f(x) & \text{für } x\in D,\\ a & \text{für } x=x_0\end{cases}$$

stetig in x_0. Man sagt: f ist **stetig ergänzbar** in x_0 oder **stetig fortsetzbar** nach x_0.

z.B.: $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}: x\mapsto \frac{x^2-1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}$

$\Rightarrow\ \tilde f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto x-1$

3) Sei $f:\mathbb{R}\supseteq D\to F$ und $x_0\in D$ Häufungspunkt von $D\cap\,]x_0,\infty[$ und von $D\cap\,]-\infty,x_0[$.
Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in x_0.

(ii) $f(x_0)=\lim\limits_{x\downarrow x_0}f(x)=\lim\limits_{x\uparrow x_0}f(x)$.

5.33 Grenzwerte mit Potenzreihen: Zum Beispiel $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^2(\mathrm{e}^x-1)}=?.$

Nenner: $x^2\,(\mathrm{e}^x-1)\;=\;x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\;=\;x^3\underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}}_{=:f(x)}$

Da f durch eine Potenzreihe dargestellt wird, ist f stetig. Außerdem gilt $f(0)=\frac{1}{1!}=1$.

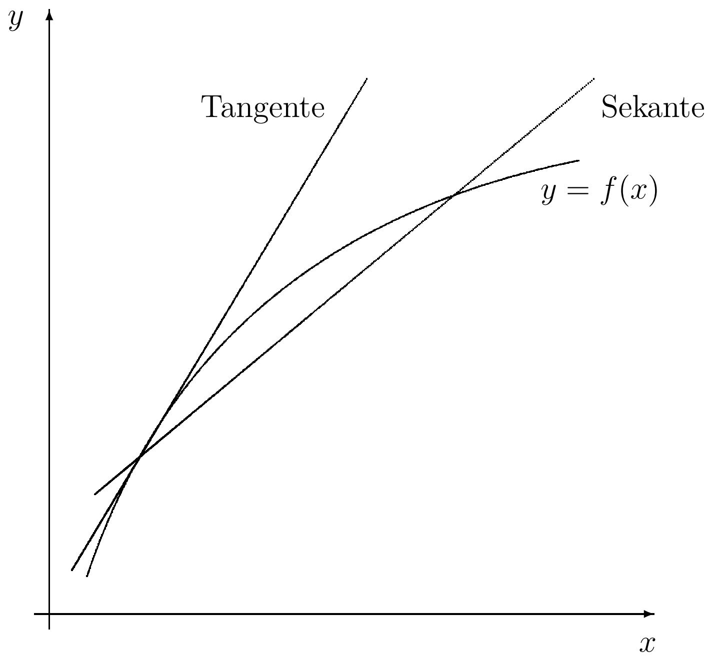
$$\begin{aligned}\text{Zähler: } \sin x-x\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}-x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\\ &= x^3\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-2}\right)}_{=:g(x)}\end{aligned}$$

g ist stetig mit $g(0)=\frac{-1}{3!}-\frac{-1}{2!}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2(\mathrm{e}^x-1)}\;=\;\lim_{x\to 0}\frac{x^3\,g(x)}{x^3\,f(x)}\;=\;\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}\;=\;\frac{g(0)}{f(0)}\;=\;\frac{1}{3}.$$

6 Differentialrechnung in einer Variablen

6.1 Die Ableitung



Gegeben: $y = f(x)$.
Frage: Tangente in $(x_0, f(x_0))$?

Für $x_1 \to x_0$ "nähert" sich Sekante an Tangente

Sekantengleichung:

$$y = f(x_0) + (x - x_0)\underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{\text{Steigung der Sekante}}$$

6.1 Definition: Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$, $x_0 \in D$, x_0 Häufungspunkt von D.

1) Die Abbildung $\Delta f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{K} : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ heißt **Differenzenquotient**.

2) f heißt **differenzierbar in x_0**, falls Δf in x_0 stetig ergänzbar ist, d.h. falls

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D,\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0) =: \frac{df}{dx}(x_0) =: \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x = x_0}$$

existiert. In diesem Fall heißt der Grenzwert die **Ableitung von f in x_0** (oder **Differentialquotient**).

3) f heißt **differenzierbar** (in D), falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Die Funktion f' heißt **Ableitung** von f.

6.2 Beispiele: **1)** Konstante Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto c$ ist differenzierbar: $f'(z) = 0$.

2) Identische Funktion id: $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto z$ ist differenzierbar: $\mathrm{id}'(z) = 1$.

3) Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \mathrm{e}^z$ ist differenzierbar: $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

6.3 Satz: $f : \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$ differenzierbar in $x_0 \;\Rightarrow\; f$ stetig in x_0.

6.4 Bemerkung: Komplexe differenzierbare Funktionen haben erstaunliche Eigenschaften und heißen **holomorphe** oder **analytische** Funktionen $\rightsquigarrow$ Funktionentheorie

6.5 Rechenregeln: Seien $f, g : \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$ differenzierbar (in $x_0 \in D$). Dann gilt

1) $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{K}$ fest) ist differenzierbar (in x_0), und es gilt $(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda\, f'(x_0)$.

2) $f + g$ ist differenzierbar (in x_0), und es gilt $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

3) $f \cdot g$ ist differenzierbar (in x_0) mit

$$(f \cdot g)'(x_0) \;=\; f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0) \quad (\textbf{Produktregel}).$$

4) Falls $g(x_0) \neq 0$, ist $\dfrac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) \;=\; \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad (\textbf{Quotientenregel}).$$

5) Ableitung der Umkehrfunktion: Sei $D = [a, b]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $f^{-1} : f(D) \to D$ sei die Umkehrfunktion. Ist f in x_0 differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) \;=\; \frac{1}{f'(x_0)} \quad \Big(= \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}\Big).$$

6) Seien $f : D \to \mathbb{K}$, $g : D' \to \mathbb{K}$ mit $f(D) \subseteq D'$. Sei f in $x_0 \in D$ differenzierbar, g in $f(x_0) \in D'$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : D \to \mathbb{K}$ in x_0 differenzierbar und

$$(g \circ f)'(x_0) \;=\; \underbrace{g'(f(x_0))}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{innere Ableitung}} \quad (\textbf{Kettenregel}).$$

6.6 Beispiele: **1)** Für festes $n \in \mathbb{Z}$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} : z \mapsto z^n$ gilt $f'(z) = n\, z^{n-1}$.

2) Für festes $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ sei $f :]0, \infty[\to]0, \infty[: x \mapsto x^q$. Dann gilt $f'(x) = q\, x^{q-1}$.

3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{1/2}$.

4) Für den reellen Logarithmus $\ln :]0, \infty[\to]0, \infty[: x \mapsto \ln x$ gilt $\dfrac{\mathrm{d} \ln x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$.

5) Aus der Schule: $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] : x \mapsto \sin x$ ist bijektiv mit $f'(x) = \cos x$. Für die Umkehrabbildung arcsin gilt $\dfrac{\mathrm{d} \arcsin x}{\mathrm{d}x} \;=\; \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

6.2 Höhere Ableitungen

6.7 Offene Mengen: Sei (M,d) ein metrischer Raum, $D \subseteq M$.

1) $x_0 \in D$ heißt **innerer Punkt** von D, falls

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subseteq D.$$

Falls $M = \mathbb{R}^n$ oder $M = \mathbb{C}^n$ mit der üblichen Metrik, dann ist jeder innere Punkt automatisch Häufungspunkt von D.

2) D heißt **offen**, falls alle Elemente von D innere Punkte sind.

6.8 Beispiele: $]a,b[\subset \mathbb{R}$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sind offen;
$[a,b[\subset \mathbb{R}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2$ sind nicht offen.

6.9 Definition: Sei $f : \mathbb{K} \supseteq D \to \mathbb{K}$ und $k \in \mathbb{N}$.

1) f heißt im inneren Punkt $x_0 \in D$ ***k*-mal differenzierbar**, falls f auf einer Kugel $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$ $(k-1)$-mal differenzierbar ist und die $(k-1)$-te Ableitung von f in x_0 differenzierbar ist. Schreibe

$$f^{(k)}(x_0) \;:=\; \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) \;:=\; \frac{d}{dx}\left(f^{(k-1)}\right)(x_0) \qquad (f^{(2)} =: f'',\ f^{(3)} =: f''',\ f^{(0)} =: f).$$

2) Sei nun D offen. Dann heißt f ***k*-mal differenzierbar auf *D***, falls f in jedem $x_0 \in D$ k-mal differenzierbar ist; $x \mapsto f^{(k)}(x)$ heißt die ***k*-te Ableitung** von f auf D; f heißt manchmal 0-te Ableitung von f.

3) f heißt auf D ***k*-mal stetig differenzierbar**, falls f k-mal differenzierbar auf D und $f^{(k)}$ stetig auf D ist. Die Menge der auf D k-mal stetig differenzierbaren Funktionen bildet einen Vektorraum, bezeichnet mit $\boldsymbol{C^k(D \to \mathbb{K})}$, $C^\infty(D \to \mathbb{K})$ ist der Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf D.

6.10 Bemerkung: Die Rechenregeln gelten analog für höhere Ableitungen. Insbesondere:

$$(f \cdot g)^{(n)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)} \qquad (\text{“Leibnizregel”})$$

(Beweis durch vollständige Induktion.)

6.11 Beispiel: $(x \cdot \mathrm{e}^x)^{(1000)} \;=\; (x+1000)\,\mathrm{e}^x$.

6.3 Ableitung von Potenzreihen

6.12 Satz: Sei

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine (komplexe) Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann hat die Potenzreihe

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z - z_0)^{n-1}$$

denselben Konvergenzradius, und es gilt $f'(z) = g(z)$ auf $B_R(z_0)$. Das bedeutet, eine Potenzreihe kann auf dem ganzen Konvergenzkreis gliedweise differenziert werden.

Veranschaulichung: Seien R der Konvergenzradius von f, R' der Konvergenzradius von g:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \Rightarrow \quad R' = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\, \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

6.13 Folgerung: Jede Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius ist beliebig oft differenzierbar. Eine Funktion, die als Potenzreihe darstellbar ist, heißt **analytische Funktion**.

6.14 Beispiele: **1)** $\displaystyle \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \;\Rightarrow\; \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, z^{n-1}$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, z^{n-2}.$$

2) $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$ für $z \in \mathbb{C}$,
insbesondere gilt für die reelle Exponentialfunktion: $\dfrac{\mathrm{d}\mathrm{e}^x}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

3) $\ln(z)' = \dfrac{1}{z}$ für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < 1$. Früheres Beispiel: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ für $x \in \,]0, \infty[\,$.

4) $\cos(z)' = -\sin z$ für $z \in \mathbb{C}$, genauso für den reellen Cosinus.

5) $\sin(z)' = \cos z$ für $z \in \mathbb{C}$, genauso für den reellen Sinus.

6) $\arctan(x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

7) $\arcsin(x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in \,]-1, 1[\,$.

8) $\arccos(x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in \,]-1, 1[\,$.

6.4 Extrema

6.15 Definition: Sei (M,d) metrischer Raum. Die Funktion $f : M \supseteq D \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$ ein **lokales Maximum** (bzw. **lokales Minimum**), falls

$$\exists \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in D : d(x, x_0) < \varepsilon \Rightarrow f(x) \le f(x_0) \quad (\text{bzw. } f(x) \ge f(x_0)).$$

Ein lokales Maximum oder Minimum heißt auch **lokales Extremum**. Falls $f(x) = f(x_0)$ nur für $x = x_0$, so heißt das lokale Extremum **strikt** oder **isoliert**.

Falls

$$\forall x \in D : f(x) \le f(x_0) \;/\; f(x) \ge f(x_0),$$

hat f in x_0 ein **globales Maximum/globales Minimum**.

6.16 Notwendiges Kriterium für Extremum: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$ und x_0 innerer Punkt von D. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$:

$$f \text{ hat in } x_0 \text{ ein lokales Extremum} \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0.$$

Ist f differenzierbar in x_0 und $f'(x_0) = 0$, so heißt x_0 **stationärer** oder **kritischer** Punkt von f.

Beweis: f habe ein lokales Maximum in x_0. Dann folgt

$$\left.\begin{array}{rcll} f'(x_0) & = & \displaystyle\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} & \le 0 \\ f'(x_0) & = & \displaystyle\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} & \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

□

6.17 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 - x^3 = x^3(x-1)$:

Kritische Punkte: $x = 0 \;\vee\; x = \frac{3}{4}$.

In $x_0 = \frac{3}{4}$ hat f ein lokales und globales Minimum, in $x_0 = 0$ kein Extremum.

2) $f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x$:

Keine kritischen Punkte, aber bei $x_0 = 1$ hat f ein lokales und globales Maximum, bei $x_0 = 0$ ein lokales und globales Minimum.

6.5 Mittelwertsätze und Anwendungen

6.18 Satz von Rolle: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gilt:

$$f(a) = f(b) \;\Rightarrow\; \exists \xi \in]a,b[: f'(\xi) = 0.$$

Beweis: 5.10 $\Rightarrow$ f nimmt auf $[a,b]$ Minimum und Maximum an.

Fall 1) Minimum und Maximum liegen in a und b.

$$\Rightarrow\; f(x) = \text{const} = f(a) \text{ für } x \in [a,b] \;\Rightarrow\; f'(x) = 0 \text{ in } [a,b]$$

Fall 2) Maximum oder Minimum in $x_0 \in]a,b[$.

$$\overset{6.16}{\Rightarrow}\; f'(x_0) = 0.$$

$\square$

6.19 Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gilt:

$$\exists \xi \in]a,b[: f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis: Setze $F(x) := f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.

$$\Rightarrow\; F \text{ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle } (F(a) = f(a) = F(b))$$

$$\Rightarrow\; \exists \xi \in]a,b[: 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$\square$

6.20 Verallgemeinerter Mittelwertsatz: Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gilt: Ist $g'(x) \neq 0\ \forall x \in]a,b[$, so gilt

$$\exists \xi \in]a,b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

6.21 Nullableitung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gilt:

$$\big(\forall x \in]a,b[: f'(x) = 0\big) \;\Rightarrow\; f = \text{konstant auf } [a,b].$$

Beweis: Sei $y \in]a,b]$. f erfüllt die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes im Intervall $[a,y]$.

$$\Rightarrow\; \exists \xi \in]a,y[: \underbrace{f'(\xi)}_{=0} = \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \;\Rightarrow\; f(y) = f(a)$$

$\square$

6.22 Monotonie: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a, b[$.

1) Falls
$$\forall x \in]a, b[: f'(x) \geq 0 \qquad (f'(x) > 0 \quad / \quad f'(x) \leq 0 \quad / \quad f'(x) < 0),$$
so ist f auf $[a, b]$ monoton wachsend (streng monoton wachsend/monoton fallend/ streng monoton fallend).

2) Ist f auf $[a, b]$ monoton wachsend/fallend, so gilt: $f'(x) \geq 0/f'(x) \leq 0$ auf $]a, b[$.

Beweis: **1)** Folgt aus Mittelwertsatz und $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

2) $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Vorzeichenüberlegung! □

6.23 Lokale Extrema: Sei $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$, $x_0 \in]a, b[$.

1) Gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass
$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \ (f'(x) > 0) \quad &\text{für} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0, \\ f'(x) \leq 0 \ (f'(x) < 0) \quad &\text{für} \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon, \end{aligned}$$
so hat f in x_0 ein lokales (striktes) Maximum: $\forall x \in B_\varepsilon(x_0) : f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.

Entsprechend für Minimum.

2) Ist f in x_0 zweimal differenzierbar und $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$ $(f''(x_0) > 0)$, so besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum/Minimum.

3) Ist f in x_0 zweimal differenzierbar und besitzt f in x_0 ein lokales Maximum/Minimum, so ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \leq 0/ \geq 0$.

Beweis: **1)** Aus letztem Satz:
$$f \text{ ist monoton wachsend für } x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0$$
$$f \text{ ist monoton fallend für } x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon$$

2) $f'(x_0) = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - 0}{x - x_0} = f''(x_0) < 0$
$$\Rightarrow \quad \exists \varepsilon > 0 : \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0 \text{ für } x_0 - \varepsilon < x < x_0 \ \vee \ x_0 < x < x_0 + \varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x_0 < x < x_0 + \varepsilon \\ > 0 & \text{für } x_0 - \varepsilon < x < x_0 \end{cases}$$

3) 6.16 $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$. Wäre $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ Minimum $\lightning$ $\square$

6.24 Achtung: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$ bedeutet gar nichts! Z.B. $f : x \mapsto x^4$ oder $f : x \mapsto x^5$ bei $x_0 = 0$. In diesem Fall muss man höhere Ableitungen betrachten.

6.25 Regeln von de l'Hospital: Seien $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x \downarrow a} g(x) = 0 \ \wedge \ g'(x) \neq 0$ auf $]a, b[$. Dann gilt:

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Beweis: Setze $f(a) := 0$, $g(a) := 0$. Dann gilt für $x \in]a, b[$: $f, g : [a, x] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar auf $]a, x[$. Verallgemeinerter Mittelwertsatz auf $[a, x]$:

$$\exists \xi_x \in]a, x[: \underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}}_{= \frac{f(x)}{g(x)}} = \underbrace{\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}}_{\to c \text{ für } x \downarrow a}$$

$\square$

6.26 Varianten: **1)** Typ $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: $\lim\limits_{x \downarrow a} f(x) = \infty = \lim\limits_{x \downarrow a} g(x)$. Dann

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2) Dasselbe für $x \uparrow b$ oder $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$.

3) Typ "$0 \cdot \infty$": $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = \infty$: $\lim f(x) \cdot g(x) = \lim \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$.

4) Typ "1^∞": $\lim f(x) = 1$, $\lim g(x) = \infty$: $f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x) \cdot \ln f(x)}$ geht mit vorigem Fall.

5) Alle Varianten gelten auch bei bestimmter Divergenz:

$$\lim \frac{f'}{g'} = +\infty \ (-\infty) \ \Rightarrow \ \lim \frac{f}{g} = +\infty \ (-\infty).$$

6.27 Beispiele: **1)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

3) $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1/x} = 1$.

4) $\lim\limits_{x \downarrow 0} x \ln x = 0$.

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 \, \mathrm{e}^x = 0$.

6.6 Der Satz von Taylor

6.28 Vorbemerkung: Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar auf $]a,b[$, $x_0 \in]a,b[$. Es gibt genau ein Polynom T_n n-ten Grades, so dass

$$T_n^{(k)}(x_0) \;=\; f^{(k)}(x_0) \qquad \text{für } 0 \le k \le n.$$

Für dieses Polynom gilt

$$T_n(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}\,(x-x_0)^j.$$

T_n heißt das ***n*-te Taylorpolynom** für f, $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ das ***n*-te Restglied**.

6.29 Beispiel: $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x_0 = 0$: $f^{(k)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ für $k \in \mathbb{N}_0$.

$$\Rightarrow\; T_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!}\,x^j, \qquad R_n(x) = \mathrm{e}^x - \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}.$$

$x_0 = 1$: $f^{(k)}(1) = \mathrm{e} \;\Rightarrow\; T_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{e}}{j!}(x-1)^j.$

6.30 Satz (Taylor, Lagrange): Sei f $(n+1)$-mal stetig differenzierbar auf $]a,b[$, $x_0 \in]a,b[$ und $x \in]x_0,b[$. Dann existiert $\xi \in]x_0,x[$, so dass

$$f(x) \;=\; T_n(x) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}}_{=R_n(x)}$$

(gilt genauso für $x \in]a,x_0[$, nur dann $\xi \in]x,x_0[$).

6.31 Bemerkungen: **1)** Für $n = 0$ ist dies wieder der Mittelwertsatz.

2) T_n approximiert f an einer Stelle x_0 bis zur n-ten Ableitung. Erst durch Diskussion des Restgliedes erkennt man, wie gut die Approximation durch T_n in einer Umgebung von x_0 ist.

6.32 Beispiele: **1)** $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x_0 = 0$, $x = 1$: e^1 soll bis auf Genauigkeit 10^{-5} durch $T_n(1)$ bestimmt werden.

$$|R_n(1)| \;=\; \left|\frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}\,(1-0)^{n+1}\right| \overset{0<\xi<1}{\le} \frac{\mathrm{e}^1}{(n+1)!} \;\le\; \frac{3}{(n+1)!} \;\overset{!}{\le}\; 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow\; (n+1)! \;\ge\; 3\cdot 10^5 \;\Rightarrow\; n \ge 8 \quad (9! = 362880)$$

Das bedeutet: $\left|\mathrm{e} - T_8(1)\right| < 10^{-5}$. Mit Rechner:

$$\begin{aligned} T_6(1) &= 2.7180556, & R_6 &= 2.262 \cdot 10^{-4} \\ T_7(1) &= 2.7182540, & R_7 &= 2.78 \cdot 10^{-5} \\ T_8(1) &= 2.7182788, & R_8 &= 3.0 \cdot 10^{-6} \\ \mathrm{e}^1 &= 2.7182818\ldots \end{aligned}$$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \mathrm{e}^x,\ x_0 = 0$. Was passiert für $n \to \infty$?

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}(x-0)^{n+1}\right| \le \max\{\mathrm{e}^x, 1\}\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$$

für $n \to \infty$ bei jedem festen $x \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \mathrm{e}^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

(wie bereits bekannt).

3) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$, $x_0 = 0$.

Es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$, also auch $T_n(x) = 0$ für $n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R}$. Diese Funktion f ist um $x_0 = 0$ nicht durch das Taylorpolynom approximierbar.

4) Die **Binomialreihe**: Für $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1+x)^r = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{r}{j} x^j \qquad \text{für } x \in]-1, 1[\qquad \left(\binom{r}{j} := \frac{r \cdot (r-1) \cdots (r-j+1)}{j!}\right).$$

6.7 Extrema: Hinreichende Bedingungen

6.33 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f \in C^m(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ und $f'(x_0) = \ldots = f^{m-1}(x_0) = 0$, $f^{(m)}(x_0) \neq 0$.

1) Ist m ungerade, so hat f in x_0 einen **Sattelpunkt**, d.h. Wendepunkt mit waagrechter Tangente.

2) Falls m gerade ist:

- **a)** Ist $f^{(m)}(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum.
- **b)** Ist $f^{(m)}(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

Beweis: Aus Satz von Taylor: $f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{m-1} 0 + \dfrac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x-x_0)^m$,

und $f^{(m)}(\xi)$ hat konstantes Vorzeichen für $|\xi - x_0| < \varepsilon$. □

6.34 Beispiele: $y = x^6$, $y = x^7$.

6.8 Ableitung II

6.35 Definition: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig. Die Menge

$$K \;:=\; \big\{\gamma(t) : t \in [a,b]\big\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

heißt **Kurve** im $\mathbb{R}^n$, $(\gamma, [a,b])$ heißt **Parameterdarstellung** von K. Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$, so heißt K **geschlossen**. Ist $\gamma\big|_{[a,b[}$ injektiv, so heißt K **Jordan-Kurve**.

6.36 Beispiele: **1)** $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

2) $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$: Dieselbe Kurve wie in 1).

3) $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}$ (Schraubenline).

4) $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} t\cos(2\pi t) \\ t\sin(2\pi t) \end{pmatrix}$ (Archimedische Schneckenlinie).

6.37 Definition und Satz: Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}^n$ und x_0 Häufungspunkt von D. Dann heißt f **differenzierbar in $\boldsymbol{x_0}$**, falls

$$f'(x_0) \;:=\; \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D,\ x \neq x_0}} \frac{1}{x - x_0} \cdot \big(f(x) - f(x_0)\big)$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn jede Koordinate f_j von f in x_0 differenzierbar ist $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$f'(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_n'(x_0) \end{pmatrix}$$

6.38 Beispiele: **1)** $f(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ \mathrm{e}^{x^2 - x} \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; f'(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ (2x-1)\,\mathrm{e}^{x^2-x} \end{pmatrix}$

2) Seien $A \in \mathcal{M}_{n,n}$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \mathrm{e}^{t \cdot A}\, v$. Dann gilt $g'(t) = A \cdot \mathrm{e}^{t \cdot A}\, v$.

3) Man kann die obige Definition der Ableitung auf $f : \mathbb{R} \supseteq D \to V$ erweitern, wobei V ein normierter Vektorraum ist. Mit $V = \mathcal{M}_{n,n}$, $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n,n} : t \mapsto \mathrm{e}^{t \cdot A}$ folgt dann $f'(t) = A \cdot \mathrm{e}^{t \cdot A}$.

6.39 Geometrische Bedeutung der Ableitung: Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ in t_0 differenzierbar mit $\gamma'(t_0) \neq 0$, so ist $\gamma'(t_0)$ ein Tangentenvektor (Richtungsvektor der Tangente an K) im Punkt $\gamma'(t_0)$. $\|\gamma'(t_0)\|$ gibt die „Momentangeschwindigkeit“ an, mit der K durchlaufen wird.

6.40 Beispiele: **1)** $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$:

$\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} -2\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix}$ ist Tangentenvektor im Punkt $(2\cos t_0, \sin t_0)$.

2) $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix}$:

$\gamma'(\frac{t_0}{2}) = \begin{pmatrix} -4\sin t_0 \\ 2\cos t_0 \end{pmatrix}$ ist Tangentenvektor im Punkt $(2\cos t_0, \sin t_0)$. Die Ellipse wird mit doppelter Geschwindigkeit durchlaufen.

6.41 Achtung bei $\boldsymbol{\gamma'(t_0) = 0}$: Sei z.B. $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ für $-1 \le t < 0$, $\gamma(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$ für $0 \le t \le 1$. Dann gilt $\gamma \in C^1([a, b] \to \mathbb{R}^2)$, aber K hat eine Ecke in $(0, 0)$.

6.42 Definition: Sei $\gamma : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.

1) Ist γ in $t_0 \in I$ differenzierbar mit $\gamma'(t_0) \neq 0$, so heißt $T(t_0) := \dfrac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ der **Tangenteneinheitsvektor** in t_0.

2) γ heißt **regulär**, falls γ differenzierbar auf I ist mit $\gamma'(t) \neq 0$ auf I.

3) γ heißt **singulär in $\boldsymbol{t_0 \in I}$**, falls $\gamma'(t_0) = 0$.

6.43 Bemerkung: Besitzt die Kurve K eine reguläre Parameterdarstellung $(\gamma, [a, b])$, so hat K keine Ecken.

7 Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$

7.1 Ableitung III

7.1 Der Graph von Funktionen mehrerer Veränderlicher: Ist $f : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}$ und D offen, so ist der Graph von f

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ f(x_1, x_2) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in D \right\}$$

eine (gekrümmte) Fläche im $\mathbb{R}^3$. Veranschaulichung durch Höhenlinien ($f(x) = \text{konst}$) oder durch Schnitte mit Ebenen.

Allgemeiner: Ist $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ und D offen, so ist der Graph von f

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in D \right\}$$

eine „Hyperfläche“ im $\mathbb{R}^{n+1}$.

7.2 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto 4 + 5x_1 - 2x_2$:

Graph $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 4 + 5x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ (Ebene).

2) Allgemeiner: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n$: Graph ist Hyperebene im $\mathbb{R}^{n+1}$.

3) $f : D = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\} \to \mathbb{R} : (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$:

Graph von f: $G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1^2 + x_2^2 < 1 \ \wedge \ x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} \right\}$ (obere Halbkugel).

4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + 4x_2^2$ (elliptisches Paraboloid).

5) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1x_2$ (Der Graph ist eine Sattelfläche).

7.3 Äquivalente Definition der Ableitung: Seien $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von D. Dann sind äquivalent:

(i) f ist differenzierbar in x_0.

(ii) Es existiert eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D,\ x \neq x_0}} \frac{1}{|x - x_0|} \big(f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) \big) = 0$$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so gilt $a = f'(x_0)$.

7.4 Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, D offen und $x_0 \in D$. Dann heißt f **differenzierbar** in x_0, falls eine $1 \times n$-Matrix $A = (a_1, \ldots, a_n)$ $(a_j \in \mathbb{R})$ existiert mit

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D,\ x \neq x_0}} \frac{1}{\|x - x_0\|}\big(f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0)\big) \;=\; 0$$

oder äquivalent:

$$f(x) \;=\; f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \|x - x_0\|\, r(x) \qquad \text{mit } \lim_{x \to x_0} r(x) = 0.$$

Die Matrix A ist durch diese Bedingung eindeutig bestimmt und heißt **Ableitung** von f in x_0. Wir schreiben $f'(x_0) := A = (a_1, \ldots, a_n)$. Der affine Raum

$$T \;:=\; \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x_{n+1} \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^n \wedge x_{n+1} = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \right\}$$

heißt **Tangentialebene** (falls $n = 2$) bzw. **Tangentialhyperebene** an den Graphen von f im Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$.

7.5 Die Idee:: Die Funktion $g(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die optimale „lineare“ Approximation von f bei x_0.

7.6 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1\, x_2$.

2) $f : \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\} \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$.

7.7 Satz: Ist f differenzierbar in x_0, so ist f stetig in x_0.

7.8 Wichtige Idee: Zur Untersuchung oder Veranschaulichung des Graphen in der Umgebung eines Punktes $\big(x_0, f(x_0)\big)$ kann man das Verhalten von f längs der Geraden $x = x_0 + t \cdot v$ $(t \in \mathbb{R})$ mit festem Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^n$ betrachten. Anders ausgedrückt: Man schneidet G mit geeigneten Ebenen:

$$\begin{aligned} E \;&:=\; \big\{(x_0 + t \cdot v, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : t, s \in \mathbb{R}\big\} \\ \Rightarrow\; E \cap G \;&=\; \big\{\big(x_0 + t \cdot v, f(x_0 + t \cdot v)\big) : t \in D'\big\} \qquad (D' \subseteq \mathbb{R} \text{ geeignet}). \end{aligned}$$

Diese Schnittkurve $E \cap G$ kann man als Kurve im $\mathbb{R}^2$ auffassen:

$$K \;:=\; \big\{\big(t, f(x_0 + t \cdot v)\big) : t \in D'\big\}.$$

Vorteil: Man untersucht die Funktion $t \mapsto f(x_0 + t \cdot v)$, die nur von **einer reellen** Variablen abhängt.

Noch spezieller: Wähle als v die Koordinatenvektoren $e_1, \ldots, e_n$:

$$g_j(t) \ := \ \big(t, f(x_0 + t \cdot e_j)\big).$$

und betrachte deren Tangentialvektoren im Punkt $t = 0$ (falls existent):

$$g_j'(0) \ = \ \Big(1, \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h \cdot e_j) - f(x_0)}{h}\Big).$$

7.9 Partielle Ableitungen: Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, D offen und f differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann existiert für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ der Grenzwert

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h \cdot e_j) - f(x_0)}{h} \ =: \ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) \ =: \ \partial_{x_j} f(x_0) \ =: \ \partial_j f(x_0).$$

Dieser Grenzwert heißt **partielle Ableitung** von f nach x_j. Es gilt

$$f'(x_0) \ = \ \big(\partial_{x_1} f(x_0),\ \partial_{x_2} f(x_0),\ \ldots,\ \partial_{x_n} f(x_0)\big).$$

Der Vektor

$$\nabla f(x_0) \ := \ \begin{pmatrix} \partial_1 f(x_0) \\ \vdots \\ \partial_n f(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt **Gradient** von f.

Beweis: $0 \ = \ \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{1}{\|x - x_0\|}\big(f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\big)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ 0 \ &= \ \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \underbrace{\frac{1}{\|x_0 + h \cdot e_j - x_0\|}}_{=\frac{1}{|h|}} \Big(f(x_0 + h \cdot e_j) - f(x_0) - \underbrace{f'(x_0)(x_0 + h \cdot e_j - x_0)}_{=h\left(f'(x_0)\right)_j}\Big) \\
&= \ \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \operatorname{sign}(h) \left(\frac{f(x_0 + h \cdot e_j) - f(x_0)}{h} - \big(f'(x_0)\big)_j\right) \\
\Rightarrow \ \partial_{x_j} f(x_0) \ &= \ \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h \cdot e_j) - f(x_0)}{h} \quad (j = 1, \ldots, n) \text{ existieren und} \\
f'(x_0) \ &= \ \big(\partial_{x_1} f(x_0),\ \partial_{x_2} f(x_0),\ \ldots,\ \partial_{x_n} f(x_0)\big).
\end{aligned}$$

□

7.10 Bemerkung: $f'(x_0) \cdot (x - x_0) \ = \ \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$,
$\nabla f(x_0) = f'(x_0)^T$ (transponierte Matrix).

7.11 Geometrische Bedeutung der partiellen Ableitung: Schneide den Graphen von f mit der Ebene

$$E := \big\{(x_0 + t \cdot e_j, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : t, s \in \mathbb{R}\big\}.$$

Die Schnittkurve ist der Graph der Funktion

$$t \mapsto f(x_0 + t \cdot e_j).$$

Für die Ableitung dieser Funktion im Punkt $t = 0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t \cdot e_j)\Big|_{t=0} = \partial_{x_j} f(x_0).$$

7.12 Geometrische Bedeutung des Gradienten: Für festes $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ schneide den Graph von f mit der Ebene

$$E := \big\{(x_0 + t \cdot v, s) : t, s \in \mathbb{R}\big\}.$$

Die Steigung der Schnittfunktion $t \mapsto f(x_0 + t \cdot v)$ im Punkt $t = 0$ ergibt sich zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t \cdot v)\Big|_{t=0} = f'(x_0)\, v = \langle \nabla f(x_0), v \rangle\,.$$

Die Steigung (in Abhängigkeit von v) ist am größten, wenn v parallel zu $\nabla f(x_0)$ ist. Dann hat die Steigung den Wert $\|\nabla f(x_0)\|$.

Also: Der Gradientenvektor zeigt in die Richtung der größten Zunahme von $f(x)$.

7.13 Ein Kriterium für Differenzierbarkeit: Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ stetig, D offen, alle partiellen Ableitungen $\partial_j f$ existieren in D und seien stetig in $x_0 \in D$. Dann ist f in x_0 differenzierbar, und es gilt $f'(x_0) = \big(\partial_{x_1} f(x_0), \ldots, \partial_{x_n} f(x_0)\big)$. Also:

Für Differenzierbarkeit in x_0 ist notwendig:	f ist stetig und $\nabla f(x_0)$ existiert.
Für Differenzierbarkeit in x_0 ist hinreichend:	f ist stetig, ∇f existiert in D, und ∇f ist stetig in x_0.

Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist $C^k(D \to \mathbb{R})$ der Raum aller Funktionen, deren partielle Ableitungen bis zur k-ten Ordnung auf D existieren und stetig sind.

7.14 Ergänzung: Die Existenz aller partiellen Ableitungen in einem Punkt x_0 garantiert nicht die Differenzierbarkeit in x_0. Sei z.B.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \ \vee \ y \neq x \\ 1 & \text{falls } y = x \ \wedge \ x \neq 0 \end{cases}$$

Dann gilt $\partial_x f(0,0) = 0$, $\partial_y f(0,0) = 0$, aber die Funktion f ist in $(0,0)$ unstetig, also sicher nicht differenzierbar.

7.2 Extrema

Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, D offen und f differenzierbar in $x_0 \in D$. Wir wollen feststellen, ob f in x_0 ein Extremum besitzt. Wenn f in x_0 ein Maximum besitzt, dann haben auch alle Funktionen

$$g_v : t \mapsto f(x_0 + t \cdot v)$$

mit beliebigen Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ für $t = 0$ ein Maximum (genauso mit Minimum). Wir wissen:

- Notwendig für ein lokales Extremum ist $g_v'(0) = 0$.
- Hinreichend für ein striktes lokales Extremum ist $g_v'(0) = 0$ und $g_v''(0) > 0$ oder $g_v''(0) < 0$.

Weiter ist bekannt:

$$g_v'(t) \;=\; f'(x_0 + t \cdot v)\, v \;=\; \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f(x_0 + t \cdot v) v_j.$$

Daraus folgt sofort:

7.15 Notwendige Bedingung: Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, D offen und f differenzierbar in $x_0 \in D$. Dann gilt:

$$f \text{ hat in } x_0 \text{ ein Extremum } \Rightarrow\; f'(x_0) = \big(\partial_{x_1} f(x_0),\; \ldots,\; \partial_{x_n} f(x_0)\big) = 0.$$

Nun nehmen wir an, dass die partiellen Ableitungen $\mathbb{R}^n \supseteq D \ni x \mapsto \partial_{x_j} f$ wieder differenzierbar sind. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\partial_{x_j} f(x_0 + t \cdot v)}{\mathrm{d}t} &= \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}(\partial_{x_j} f)(x_0 + t \cdot v)\, v_k \\
\Rightarrow\; g_v''(t) &= \sum_{j,k=1}^{n} \partial_{x_k}(\partial_{x_j} f)(x_0 + t \cdot v)\, v_k\, v_j \\
\Rightarrow\; g_v''(0) &= \sum_{j,k=1}^{n} \partial_{x_k}(\partial_{x_j} f)(x_0)\, v_k\, v_j \\
&= \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_1}\partial_{x_2} f(x_0) & \ldots & \partial_{x_1}\partial_{x_n} f(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_{x_n}\partial_{x_1} f(x_0) & \partial_{x_n}\partial_{x_2} f(x_0) & \ldots & \partial_{x_n}\partial_{x_n} f(x_0) \end{pmatrix}}_{=:H_f(x_0) \text{ (Hessematrix)}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

7.16 Hinreichende Bedingung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ und $H_f(x_0)$ die Hessematrix von f in x_0. Dann gelten:

1) Falls $f'(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ positiv definit ist, besitzt f in x_0 ein striktes lokales Minimum.

2) Falls $f'(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ negativ definit ist (d.h. $-H_f(x_0)$ ist positiv definit), besitzt f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

Beweis: Wenn 1) erfüllt ist, zeigt die obige Rechnung, dass alle Funktionen g_v in $t = 0$ ein Minimum besitzen. Dies veranschaulicht, dass die Bedingung 1) für das Vorliegen eines Minimums sinnvoll ist. Den strikten Beweis kann man erst mit dem Satz von Taylor (Satz 7.32) führen.

$\square$

Wir werden später sehen: $H_f(x_0)$ ist symmetrisch. Das bedeutet, dass $H_f(x_0)$ diagonalisierbar ist. Deshalb kann man den letzten Satz auch anders formulieren:

7.17 Satz: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$, $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:

1) Hat die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ nur positive Eigenwerte, so hat f in x_0 ein striktes lokales Minimum.

2) Hat die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ nur negative Eigenwerte, so hat f in x_0 ein striktes lokales Maximum.

3) Ohne Beweis: Hat die Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ positive und negative Eigenwerte, so hat f in x_0 einen Sattelpunkt: In jeder Umgebung von x_0 gibt es Punkte x mit $f(x) > f(x_0)$ und Punkte mit $f(x) < f(x_0)$.

7.18 Beispiele: **1)** $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x^2 - y^2)\ln x$ in $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$.

2) $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4xy - x^3y - xy^3$

3) $f : D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x\,y$:
Einziger kritischer Punkt: $(x, y) = (0, 0)$ mit $f(0, 0) = 0$. Hier liegt ein Sattelpunkt vor. Also hat f im Inneren von D kein Extremum.

Da D beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt f auf D das Maximum und Minimum an. Also muss f das Minimum und Maximum am Rand von D annehmen.

Untersuche f am Rand: $\Rightarrow$ Maximum $f\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$, Minimum $f\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$

7.3 Ableitung IV

7.19 Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m$, D offen und $x_0 \in D$. Dann heißt f **differenzierbar** in x_0, falls eine $m \times n$-Matrix A existiert mit

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D,\ x \neq x_0}} \frac{1}{\|x - x_0\|}\big(f(x) - f(x_0) - A \cdot (x - x_0)\big) \;=\; 0$$

oder äquivalent:

$$f(x) \;=\; f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + \|x - x_0\|\, r(x) \qquad \text{mit } \lim_{x \to x_0} r(x) = 0.$$

Die Matrix A ist durch diese Bedingung eindeutig bestimmt und heißt **Ableitung** von f in x_0. Wir schreiben $f'(x_0) := A$.

7.20 Bemerkungen: **1)** Im Fall $m = 1$ ist dies genau die Definition 7.4.

2) Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt

$$f'(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 & \partial_{x_2} f_1 & \dots & \partial_{x_n} f_1 \\ \partial_{x_1} f_2 & \partial_{x_2} f_2 & \dots & \partial_{x_n} f_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m & \partial_{x_2} f_m & \dots & \partial_{x_n} f_m \end{pmatrix}$$

Die $m \times n$-Matrix $J_f(y) = \big(\partial_i f_j(y)\big)_{i,j}$ heißt auch **Jacobi-Matrix** von f.

7.21 Beispiel: $f(x,y) = \begin{pmatrix} x\, \mathrm{e}^y \\ x\, y \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; J_f(x,y) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^y & x\, \mathrm{e}^y \\ y & x \end{pmatrix}.$

7.22 Ableitung des Gradienten: Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in D, D offen. Dann gilt $\nabla f : D \to \mathbb{R}^n$. Ist ∇f in $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist die Jacobi-Matrix von ∇f:

$$(\nabla f)'(x_0) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(x_0) & \partial_2 \partial_1 f(x_0) & \dots & \partial_n \partial_1 f(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 \partial_n f(x_0) & \partial_2 \partial_n f(x_0) & \dots & \partial_n^2 f(x_0) \end{pmatrix}$$

die **Hesse-Matrix** von f.

7.23 Beispiel: $f(x,y) = x\, \mathrm{e}^y \;\Rightarrow\; \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^y \\ x\, \mathrm{e}^y \end{pmatrix}, \quad (\nabla f)'(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^y \\ \mathrm{e}^y & x\, \mathrm{e}^y \end{pmatrix}.$

7.4 Mittelwertsätze und mehr

7.24 Mittelwertsatz bei mehreren Variablen: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(D \to \mathbb{R})$ und $x_0, y_0 \in D$, so dass die Verbindungsstrecke in D liegt: $\{x_0 + t \cdot (y_0 - x_0) : 0 \leq t \leq 1\} \subset D$. Dann

$$\exists \tau \in]0,1[: f(y_0) - f(x_0) \ = \ \big\langle \nabla f\big(x_0 + \tau \cdot (y_0 - x_0)\big), y_0 - x_0 \big\rangle \,.$$

Beweis: Setze $g(t) := f\big(x_0 + t \cdot (y_0 - x_0)\big)$ für $0 \leq t \leq 1$. Da f differenzierbar ist, gilt

$$g'(t) \ = \ f'\big(x_0 + t \cdot (y_0 - x_0)\big)(y_0 - x_0) \ = \ \big\langle \nabla f\big(x_0 + t \cdot (y_0 - x_0)\big), y_0 - x_0 \big\rangle \,.$$

Der Mittelwertsatz 6.19 liefert

$$f(y_0) - f(x_0) \ = \ g(1) - g(0) \ = \ g'(\tau) \cdot 1 \ = \ \big\langle \nabla f\big(x_0 + \tau \cdot (y_0 - x_0)\big), y_0 - x_0 \big\rangle$$

□

7.25 Satz von Schwarz: Für $f \in C^2(D \to \mathbb{R})$ gilt $\partial_j \partial_k f = \partial_k \partial_j f$ in D. Insbesondere ist die Hesse-Matrix von f symmetrisch.

Entsprechend: Sei $f \in C^m(D \to \mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 \leq m$. Dann gilt

$$\partial_j^{\alpha_1} \partial_k^{\alpha_2} f \ = \partial_k^{\alpha_2} \partial_j^{\alpha_1} f \qquad \text{in } D.$$

7.26 Fehlerfortpflanzung: Bei Berechnungen mit Maschinenzahlen treten im Allgemeinen mindestens Rundungsfehler auf, d.h. die Ergebnisse weichen vom exakten Wert ab. Führt man mit einem fehlerbehafteten Wert eine neue Rechnung durch, so wird sich die ursprüngliche Abweichung auf das Ergebnis auswirken. Dies nennt man **Fehlerfortpflanzung**.

Sei nun $x \in \mathbb{R}^n$ der exakte Wert und $x + \Delta x \in \mathbb{R}^n$ der fehlerbehaftete Wert. Wir schätzen für eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ ab, wie groß die Abweichung $f(x + \Delta x) - f(x)$ ist. Mit dem Mittelwertsatz 7.24:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \ = \ \langle \nabla f(x + \tau \Delta x), \Delta x \rangle \approx \langle \nabla f(x), \Delta x \rangle \,.$$

Z.B. folgt für die Funktion $f(x,y) = xy$ bei $xy \neq 0$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) \ \approx \ y\Delta x + x\Delta y$$

und

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)}{f(x,y)} \ \approx \ \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}.$$

bzw. für den relativen Fehler

$$\left| \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)}{f(x,y)} \right| \ \lessapprox \ \left| \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| \frac{\Delta y}{y} \right|.$$

Also: Bei Produktbildung addieren sich die relativen Fehler

7.27 Kettenregel: Sei $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m,\ g : \mathbb{R}^m \supseteq D' \to \mathbb{R}^k$ mit $f(D) \subseteq D'$. Ist f in $x_0 \in D$ und g in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist $h := g \circ f$ in x_0 differenzierbar mit

$$h'(x_0) \;=\; g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

7.28 Beispiele: **1)** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix} : f'(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix}$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_1\, y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} : g'(y) = \begin{pmatrix} y_2 & y_1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Kettenregel: $(g \circ f)'(x) \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & x^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ \mathrm{e}^x \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x(x^2 + 2x) \\ 2x - \mathrm{e}^x \end{pmatrix}$

Direkt: $g \circ f(x) = \begin{pmatrix} x^2\, \mathrm{e}^x \\ x^2 - \mathrm{e}^x \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; (g \circ f)'(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x(x^2 + 2x) \\ 2x - \mathrm{e}^x \end{pmatrix}$

2) $g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1\, x_2\, x_3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix},\ f(y_1, y_2) = \mathrm{e}^{y_1^2\, y_2}$.

3) Wichtiges Beispiel: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

7.29 Multiindizes: Für partielle Ableitungen höherer Ordnung ist folgende Notation geschickt:

$$\nabla^\alpha f \;:=\; \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} f \qquad \text{für } \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$$

(∇ sprich „Nabla“). Zum Rechnen mit sogenannten **Multiindizes** $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ vereinbart man:

$$\begin{aligned} |\alpha| \;&:=\; \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \\ \alpha \le \beta \;&\Leftrightarrow\; \alpha_1 \le \beta_1 \;\wedge\; \ldots \;\wedge\; \alpha_n \le \beta_n \\ \alpha! \;&:=\; (\alpha_1!) \cdots (\alpha_n!) \\ \binom{\alpha}{\beta} \;&:=\; \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha - \beta)!} \;=\; \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdot \binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} \end{aligned}$$

7.30 Leibniz-Formel: Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f, g \in C^m(D \to \mathbb{R})$. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \le m$ gilt:

$$\nabla^\alpha(g \cdot f) \;=\; \sum_{\beta \in \mathbb{N}_0^n,\ \beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \big(\nabla^\beta f\big) \cdot \big(\nabla^{\alpha - \beta} g\big) \qquad \text{in } D.$$

7.31 Ableitungen längs einer Geraden: Für $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $v \in \mathbb{R}^n$ und $\{x_0 + t \cdot v : 0 \leq t \leq 1\} \subset D$ setze $g(t) := f(x_0 + t \cdot v)$. Falls $f \in C^m(D \to \mathbb{R})$, so ist g m-Mal differenzierbar mit

$$g^{(m)}(t) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(\nabla^\alpha f\right)(x_0 + t \cdot v) \cdot v^\alpha,$$

wobei $v^\alpha := v_1^{\alpha_1} \cdots v_n^{\alpha_n}$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \sum_{j_1=1}^{n} \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1} \qquad \left(= \sum_{|\alpha|=1} \nabla^\alpha f(x_0 + t \cdot v)\, v^\alpha \right) \\
g''(t) &= \sum_{j_2=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \partial_{j_2}\partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1}\, v_{j_2} \\
&\vdots \\
g^{(m)}(t) &= \sum_{j_m=1}^{n} \sum_{j_{m-1}=1}^{n} \ldots \sum_{j_1=1}^{n} \partial_{j_m} \cdots \partial_{j_1} f(x_0 + t \cdot v)\, v_{j_1}\, v_{j_2} \cdots v_{j_m}.
\end{aligned}$$

In dieser m-fachen Summe kommen genau alle $\nabla^\alpha f$ mit $|\alpha| = m$ vor, manche mehrfach.

Wie oft kommt ein $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| = m$ vor? Kombinatorik: Verteile $m = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ Einträge auf die Plätze $j_1, \ldots, j_m$: Das sind $m!$ Möglichkeiten. Davon sind aber α_1 Möglichkeiten gleich, α_2, $\ldots$, α_n Möglichkeiten gleich.

$$\Rightarrow\ g^{(m)}(t) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \nabla^\alpha f(x_0 + t \cdot v).$$

$\square$

7.32 Satz von Taylor II: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{m+1}(D \to \mathbb{R})$, $x, x_0 \in D$ so dass die Verbindungsstrecke ganz in D liegt: $\{x_0 + t \cdot (x - x_0) : 0 \leq t \leq 1\} \subset D$. Dann existiert ein $\tau \in]0,1[$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha!} \big(\nabla^\alpha f\big)\big(x_0 + \tau \cdot (x - x_0)\big) \cdot (x - x_0)^\alpha.$$

Beweis: Wende den Satz von Taylor 6.30 auf die Funktion $g(t) := f\big(x_0 + t \cdot (x - x_0)\big)$ an, verwende den letzten Satz für $g^{(m)}(t)$.

$\square$

7.33 Beispiel: $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 + xy + y^2}$ bei $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

8 Integration

8.1 Treppen- und Regelfunktionen

Gegeben: Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Gesucht: Fläche zwischen $y = f(x)$ und x-Achse.

Typisch Mathematiker:
Existiert diese Fläche überhaupt?
Idee: Alles auf Rechteckflächen aufbauen.

8.1 Definition: **1)** Für $I \subseteq \mathbb{R}$, $I \neq \emptyset$ heißt

$$\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in I, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

charakteristische Funktion von I (χ sprich „chi“).

2) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion** auf $[a, b]$, falls es $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gibt, so dass f jeweils auf $]x_{i-1}, x_i[$ konstant ist $(1 \leq i \leq n)$.

3) Zwei Treppenfunktionen f, g heißen **gleich fast überall** ($f = g$ f.ü.), falls $f(x) = g(x)$ für $x \in [a, b]$ mit höchstens endlich vielen Ausnahmen.

Die Relation „gleich fast überall“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge alle Funktionen auf $[a, b]$.

8.2 Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ 4, & 1 < x \leq 2 \\ 2, & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f = 3 \cdot \chi_{[0,1]} + 4 \cdot \chi_{[1,2]} + 2 \cdot \chi_{[2,3]} \text{ f.ü.}$$

8.3 Satz: **1)** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Treppenfunktion

$\Leftrightarrow$ Es gibt Intervalle $I_k \subseteq [a, b]$ und Konstanten $c_k \in \mathbb{R}$ mit $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \, \chi_{I_k}$ f.ü.

2) Die Menge der Treppenfunktionen auf $[a, b]$ mit der üblichen Addition und Multiplikation mit Konstanten bildet einen Vektorraum. Außerdem sind Produkt und Betrag von Treppenfunktionen wieder Treppenfunktionen.

8.4 Definition: Ist f Treppenfunktion auf $[a,b]$ und $f = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \chi_{]x_{k-1},x_k[}$ f.ü., so heißt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

das (bestimmte) **Integral** von f. Schreibe auch $\displaystyle\int_a^b f$.

Insbesondere: $f = g$ f.ü. $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

Falls $a \le c \le d \le b$ setze $\displaystyle\int_c^d f := \int_a^b f \cdot \chi_{[c,d]}$.

8.5 Definition: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Regelfunktion**, falls es eine Folge (t_n) von Treppenfunktionen auf $[a,b]$ gibt mit $f = \lim t_n$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Insbesondere ist jede Regelfunktion beschränkt.

Beweis der Beschränktheit: Wähle $\varepsilon = 1$. Dann:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n > N_1 \quad \forall x \in [a,b] : |f(x) - t_n(x)| < 1.$$

t_{N_1+1} ist Treppenfunktion $\Rightarrow$ $\max\limits_{a\le x\le b} |t_{N_1+1}(x)|$ existiert.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ |f(x)| \;&\le\; |f(x) - t_{N_1+1}(x)| + |t_{N_1+1}(x)| \;<\; 1 + \max_{a\le x\le b} |t_{N_1+1}(x)| \;=:\; M \\
\Rightarrow\ |f(x)| \;&\le\; M \qquad \text{für } x \in [a,b].
\end{aligned}$$

□

8.6 Welche Funktionen sind Regelfunktionen: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

1) f ist stetig oder monoton $\Rightarrow$ f ist Regelfunktion.

Genauer: f ist Regelfunktion $\Leftrightarrow$ f besitzt an jeder Stelle $x \in\,]a,b]$ einen linksseitigen Grenzwert und an jeder Stelle $x \in [a,b[$ einen rechtsseitigen Grenzwert

2) $\mathcal{R}([a,b]) :=$ Menge der Regelfunktionen ist ein Vektorraum (übliche Addition von Funktionen, Multiplikation von Funktionen mit Skalaren).
Außerdem: Produkt und Betrag von Regelfunktionen sind Regelfunktionen.

$\|f\|_\infty := \sup\limits_{[a,b]} |f(x)|$ ist eine Norm auf $\mathcal{R}([a,b])$,

$\big(\mathcal{R}([a,b]), \|.\|_\infty\big)$ ist ein vollständiger normierter Raum (**Banachraum**).

8.7 Satz und Definition: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktion, (t_n) eine Folge von Treppenfunktionen mit $f = \lim t_n$ gleichmäßig. Dann existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f \; := \; \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \; := \; \lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,\mathrm{d}x$$

und ist unabhängig von der gewählten Folge (t_n).

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ heißt das (bestimmte) **Regel-** oder **Cauchy-Integral** von f, f heißt auch (Regel-) **integrierbar**.

Es ist $\int_a^a f = 0$. Wir setzen $\int_b^a f := -\int_a^b f$ für $a < b$.

Beweis: Sei $I_n := \int_a^b t_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Schritt 1: Beweise, dass (I_n) eine Cauchy-Folge ist. Dann konvergiert (I_n) in $\mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$ fest. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für $n > N$

$$|t_n(x) - f(x)| \; < \; \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Für $m, n > N$ folgt

$$|t_n(x) - t_m(x)| \; \leq \; |t_n(x) - f(x)| + |f(x) - t_m(x)| \; < \; \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{für } x \in [a, b].$$

Wähle $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_K = b$, so dass

$$t_n = \sum_{k=1}^{K} c_k\, \chi_{[x_{k-1}, x_k]} \text{ f.ü.} \quad \text{und} \quad t_m = \sum_{k=1}^{K} d_k\, \chi_{[x_{k-1}, x_k]} \text{ f.ü.}$$

$$\Rightarrow \; |c_k - d_k| \; < \; \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \; |I_n - I_m| \; \leq \; \sum |c_k - d_k|(x_k - x_{k-1}) \; < \; \frac{\varepsilon}{b-a} \sum (x_k - x_{k-1}) \; = \; \varepsilon.$$

Also konvergiert (I_n).

Schritt 2: Eindeutigkeit des Grenzwerts: Ist $(\widetilde{t_n})$ eine weitere Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert und $\widetilde{I}_n := \int_a^b \widetilde{t}_n(x)\,\mathrm{d}x$, so betrachte die Folge $t_1, \widetilde{t}_1, t_2, \widetilde{t}_2, \ldots$. Diese konvergiert ebenfalls gleichmäßig gegen f. Somit konvergiert auch die Folge $I_1, \widetilde{I}_1, I_2, \widetilde{I}_2, \ldots$. Dann müssen die Teilfolgen (I_n) und $(\widetilde{I}_n)$ gegen denselben Grenzwert konvergieren. □

8.8 Eigenschaften des Integrals: Seien $a < b$ und $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$. Dann gilt

1) Linearität: $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \qquad$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2) Monotonie: $f \geq 0$ auf $[a,b] \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_a^b f \geq 0$,

$f \leq g$ auf $[a,b] \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Spezieller und besser:

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0$ auf $[a,b]$, $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in [a,b]$, dann ist $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

3) $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \displaystyle\int_a^b f = \int_a^b g$.

4) $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \;\leq\; \int_a^b |f| \;\leq\; (b-a)\cdot\|f\|_\infty$.

Insbesondere: $\displaystyle\left|\int_a^b f - \int_a^b g\right| \;\leq\; (b-a)\cdot\|f-g\|_\infty$,

d.h. die Abbildung $\mathcal{R}([a,b]) \ni f \mapsto \displaystyle\int_a^b f \in \mathbb{R}$ ist stetig.

5) Ist f stetig auf $[a,b]$, dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $\displaystyle\int_a^b f = (b-a)\,f(\xi)$.

Allgemeiner: Ist $g \geq 0$ und f stetig, dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\displaystyle\int_a^b f\cdot g = f(\xi)\cdot\int_a^b g$ (Mittelwertsatz der Integralrechnung).

6) Für $a \leq c \leq d \leq b$ setze

$$\int_c^d f \;:=\; \int_a^b f\cdot\chi_{[c,d]}.$$

Für $a \leq c \leq b$ gilt $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$. Diese Formel gilt auch für $a \leq b \leq c$, falls f integrierbar über $[a,c]$.

Beweis: Zu 1), 3) und 4): Klar für Treppenfunktionen.
Grenzübergang $\Rightarrow$ Aussage gilt auch für Regelfunktionen.

Zu 2): Sei $f \geq 0$ und $t_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$. Setze $\widetilde{t}_n(x) := \max\{0, t_n(x)\}$. Dann gelten

- $\widetilde{t}_n$ ist Treppenfunktion,
- $\widetilde{t}_n \geq 0$, also $\displaystyle\int_a^b \widetilde{t}_n \geq 0$,
- $\widetilde{t}_n \to f$ gleichmäßig auf $[a,b]$, da $|f(x) - \widetilde{t}_n(x)| \overset{f \text{ positiv}}{\leq} |f(x) - t_n(x)|$.

$$\Rightarrow \int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \widetilde{t}_n \geq 0.$$

Sei nun f stetig auf $[a,b]$, $f(x) \geq 0$ auf $[a,b]$ und $f(x_0) > 0$. Wähle $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$. Aus der Stetigkeit von f folgt für $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$:

$$f(x) \;=\; f(x_0) + f(x) - f(x_0) \;\geq\; f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| \;>\; f(x_0) - \varepsilon \;=\; \frac{f(x_0)}{2}.$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow && f \geq g \text{ mit } g(x) := \begin{cases} 0 & |x - x_0| \geq \delta \\ \dfrac{f(x_0)}{2} & |x - x_0| < \delta \end{cases} \\ &\overset{4)}{\Rightarrow} && \int_a^b f \;\geq\; \int_a^b g \;=\; \frac{f(x_0)}{2} 2\delta \;>\; 0. \end{aligned}$$

Achtung: Diese Aussage gilt nicht, wenn die Stetigkeit von f weggelassen wird: Betrachte f auf $[0,2]$ mit $f(x) = 0$ für $x \neq 1$ und $f(x) = 1$ für $x = x_0 = 1$.

Zu 5): Sei $m := \min\limits_{[a,b]} f(x),\;\; M := \max\limits_{[a,b]} f(x)$.

$$\begin{aligned} &\overset{2)}{\Rightarrow} && m \int_a^b g \;\leq\; \int_a^b gf \;\leq\; M \int_a^b g \\ &\Rightarrow && \exists \mu \in [m, M] : \mu \int_a^b g = \int_a^b fg \end{aligned}$$

Zwischenwertsatz (siehe 5.8): $\exists \xi \in [a,b] : \mu = f(\xi)$.

Zu 6): Folgt aus $f = f \cdot \chi_{[a,c]} + f \cdot \chi_{[c,b]}$ f.ü. $\square$

8.2 Stammfunktionen

8.9 Wichtige Idee: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann heißen die Abbildungen

$$F : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad G : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Flächeninhaltsfunktionen.

8.10 Satz: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann sind die Flächeninhaltsfunktionen stetig.

Beweis: $$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| \;&=\; \left| \int_a^x f - \int_a^{x_0} f \right| \;=\; \left| \int_{x_0}^x f \right| \\ &\overset{\text{8.8, Teil4}}{\leq} |x - x_0|\, \|f\|_\infty \;<\; \varepsilon \quad \text{falls } |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty} \end{aligned}$$

Also ist F stetig. Die Stetigkeit von G folgt aus $G(x) = \displaystyle\int_a^b f - F(x)$. $\square$

8.11 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung(1667): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Dann ist F differenzierbar auf $]a, b[$, und es gilt $F' = f$.

Also: $\underbrace{\text{Integration}}_{\text{Flächenproblem}}$ ist Umkehrung der $\underbrace{\text{Differentiation}}_{\text{Tangentenproblem}}$.

Beweis: Sei $x_0 \in]a, b[\,$, $\Delta(x) := \dfrac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ für $x \neq x_0$. Zeige $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \Delta(x) = f(x_0)$.

$$\begin{aligned}
|\Delta(x) - f(x_0)| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\overset{\text{8.8, Teil 4}}{\leq} \frac{1}{|x - x_0|}\,|x - x_0| \max_{t \in [x, x_0]} |f(t) - f(x_0)|.
\end{aligned}$$

Da f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$\begin{aligned}
|f(t) - f(x_0)| &< \varepsilon \qquad \text{für } |t - x_0| < \delta \\
\Rightarrow\ |\Delta(x) - f(x_0)| &\leq \varepsilon \qquad \text{für } |x - x_0| < \delta.
\end{aligned}$$

□

8.12 Definition: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** von f, falls F stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf $]a, b[$ und $F' = f$ auf $]a, b[$ ist.

Falls f stetig ist, besitzt f eine Stammfunktion (Hauptsatz 8.11).

Alle Stammfunktionen zu f:

(i) F Stammfunktion $\Rightarrow$ $F + c$ ist Stammfunktion für beliebige Konstante c.

(ii) F, G Stammfunktionen $\Rightarrow$ $(F - G)' = f - f = 0 \overset{6.21}{\Rightarrow} F - G = \text{const.}$

8.13 Flächenberechnung: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f, so gilt für $a \leq c \leq d \leq b$:

$$\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; F(d) - F(c) \;=:\; F(x)\Big|_{x=c}^{d} \;=:\; \Big[F(x)\Big]_{x=c}^{d}.$$

Beweis: Sei $G(x) := \int_a^x f \overset{\text{Hauptsatz}}{\Rightarrow} G$ ist Stammfunktion

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad F &= G + \gamma \\
\Rightarrow\quad \int_c^d f &= \int_a^d f - \int_a^c f \;=\; G(d) - G(c) \;=\; F(d) - \gamma - (F(c) - \gamma) \;=\; F(d) - F(c)
\end{aligned}$$

□

8.14 Beispiele: **1)** $\displaystyle\int_0^2 |x^2-1|\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 (1-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x^2-1)\,\mathrm{d}x \;=\; \ldots \;=\; 2.$

2) Sei $f(x) := \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 2-x & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow\; F(x) \;:=\; \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \begin{cases} x & 0 \le x < 1 \\ -\frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} & 1 \le x < 2 \\ x - \frac{1}{2} & 2 \le x < 3 \end{cases}$$

F ist in $x=1$ differenzierbar, in $x=2$ nicht.

8.15 Definition: Die Menge aller Stammfunktionen

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \big\{F : [a,b] \to \mathbb{R} \;\big|\; F \text{ ist Stammfunktion von } f\big\}$$

heißt das **unbestimmte Integral** von f.

Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \{F+c : c \in \mathbb{R}\}$, und wir schreiben kurz

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(x) + c.$$

8.3 Wie findet man Stammfunktionen?

Wichtigste Methode: Raten. Z.B.

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \ne -1), \qquad \int \sin x\,\mathrm{d}x \;=\; -\cos x + c,$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^x + c, \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \arctan x + c,$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} \ln x + c, & \text{für } x > 0, \\ \ln(-x) + c, & \text{für } x < 0, \end{cases} \qquad \text{kurz: } \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln|x| + c \text{ für } x \ne 0.$$

8.16 Ratehilfen: **1)** Seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $]a,b[$. Dann gilt

$$\int u' \cdot v \;=\; u \cdot v - \int u \cdot v' \qquad (\textbf{Partielle Integration}).$$

2) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right]_{x=\varphi(t)} \qquad (\textbf{Integration durch Substitution}).$$

Wichtig: Diese Formel kann von links nach rechts **und** von rechts nach links benützt werden: Ist φ invertierbar, so gilt

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \qquad (\textbf{Integration durch Substitution})$$

8.17 Beispiele: **1)** $\displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x \;=\; -x\cos x+\sin x+c$

2) $\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x \;=\; x\cdot\ln|x|-x+c$ für $x\neq 0$.

3) $\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}(\cos x\cdot\sin x+x)+c.$

4) $\displaystyle\int 2t\sin(t^2+1)\,\mathrm{d}t \;=\; -\cos(t^2+1)+c.$ Dies hätte man auch erraten können!

5) Für $x\in\,]-1,1[$: $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+c\right)$ (Substitution $x=\sin t$).

6) Für $x>-\sqrt[3]{4}$: $\displaystyle\int\frac{1}{4+x^{1/3}}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}x^{2/3}-12x^{1/3}+48\ln(x^{1/3}+4)+c$ (Substitution $x=t^3$).

8.4 Integration rationaler Funktionen

Ziel: Darstellung einer rationalen Funktion $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (P,Q Polynome) als Summe „einfacher“ Brüche, die dann integriert werden können

8.18 Hilfssatz: Seien P,Q teilerfremde Polynome mit $\operatorname{Grad}P<\operatorname{Grad}Q$, und λ sei n-fache Nullstelle von Q:

$$Q(z)\;=\;(z-\lambda)^n\,Q_1(z)\quad\text{mit}\quad Q_1(\lambda)\neq 0.$$

Dann gibt es ein $a_1\in\mathbb{C}$ und ein Polynom P_1, so dass

$$\frac{P(z)}{Q(z)}\;=\;\frac{P(z)}{(z-\lambda)^nQ_1(z)}\;=\;\frac{a_1}{(z-\lambda)^n}+\frac{P_1(z)}{(z-\lambda)^{n-1}Q_1(z)};$$

a_1 und P_1 sind eindeutig, und es gilt $\operatorname{Grad}P_1<(\operatorname{Grad}Q)-1$.

Fortsetzung dieses Verfahrens:

$$\frac{P(z)}{Q(z)}\;=\;\frac{a_1}{(z-\lambda)^n}+\frac{a_2}{(z-\lambda)^{n-1}}+\ldots+\frac{a_n}{(z-\lambda)^1}+\frac{P_n(z)}{Q_1(z)}$$

mit $\operatorname{Grad}P_n<(\operatorname{Grad}Q)-n=\operatorname{Grad}Q_1$.

8.19 Beispiel: $\dfrac{4z^6-5z+8}{(z-\mathrm{i})^4(z+1+\mathrm{i})(z-4)^2}$

$$=\;\frac{a_1}{z-\mathrm{i}}+\frac{a_2}{(z-\mathrm{i})^2}+\frac{a_3}{(z-\mathrm{i})^3}+\frac{a_4}{(z-\mathrm{i})^4}+\frac{b}{z+1+\mathrm{i}}+\frac{c_1}{z-4}+\frac{c_2}{(z-4)^2}.$$

8.20 Komplexe Partialbruchzerlegung: Seien P, Q teilerfremd mit Grad $P <$ Grad Q,

$$Q(z) \;=\; a_n(z-\lambda_1)^{n_1}\cdots(z-\lambda_k)^{n_k},$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ paarweise verschieden (d.h $n_1,\ldots,n_k$ sind die (algebraischen) Vielfachheiten der Nullstellen $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$). Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $a_{j,i}\in\mathbb{C}$, so dass

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \;=\; \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_{1,i}}{\lambda-\lambda_i}+\frac{a_{2,i}}{(\lambda-\lambda_i)^2}+\ldots+\frac{a_{n_i,i}}{(\lambda-\lambda_i)^{n_i}}\right).$$

8.21 Bemerkungen: **1)** Falls Grad $P \geq$ Grad Q: Erst abdividieren:

$$\frac{P}{Q} \;=\; P_1+\frac{R}{Q} \qquad \text{mit Grad}\,R<\text{Grad}\,Q,\;\; P_1 \text{ Polynom},$$

dann 8.20 auf $\frac{R}{Q}$ anwenden.

2) Falls P und Q gemeinsame Nullstellen haben: Durch größtes gemeinsames Teilerpolynom kürzen.

8.22 Beispiel: $f(x) \;=\; \dfrac{P(x)}{Q(x)} \;=\; \dfrac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} \overset{\text{Theorie}}{=} \dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{(x+2)^2}.$

Zuhaltemethode: Multipliziere mit $(x-1)$:

$$\frac{4x^2+9x-4}{(x+2)^2} \;=\; a+(x-1)(\ldots) \overset{x=1}{\Rightarrow} a=\frac{9}{3^2}=1.$$

Zuhaltemethode: Multipliziere mit $(x+2)^2$:

$$\frac{4x^2+9x-4}{x-1} \;=\; c+(x+2)(\ldots) \overset{x=-2}{\Rightarrow} c=\frac{-6}{-3}=2.$$

b kann nicht durch die Zuhaltemethode bestimmt werden. Einen x-Wert einsetzen:

$$\frac{4x^2+9x-4}{(x-1)(x+2)^2} \;=\; \frac{1}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2} \overset{x=0}{\Rightarrow} \frac{-4}{-4}=-1+\frac{b}{2}+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; b=3.$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x \;=\; \ln|x-1|+3\ln|x+2|-\frac{2}{x+2}+c.$$

8.23 Wiederholung reelle Polynome: Sei Q ein reelles Polynom, d.h. die Koeffizienten von Q sind reell. Dann gilt

$$Q(\lambda)=0 \;\Rightarrow\; Q(\overline{\lambda})=0.$$

Ist $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ Nullstelle der Vielfachheit n, so folgt

$$Q(x) \;=\; \left(x-\lambda\right)^n\left(x-\overline{\lambda}\right)^n Q_1(x),$$

wobei Q_1 wieder ein reelles Polynom ist und $Q_1(\lambda_j) \neq 0$ gilt. Mit

$$\left(x-\lambda\right)\left(x-\overline{\lambda}\right) \;=\; x^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda)\,x + |\lambda|^2 \;=:\; x^2 + \beta\,x + \gamma$$

ergibt sich als reelle Faktorisierung

$$Q(x) \;=\; a_n(x-\lambda_1)^{n_1}\cdots(x-\lambda_k)^{n_k}(x^2+\beta_{k+1}x+\gamma_{k+1})^{n_{k+1}}\cdots(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{n_l}$$

($\lambda_1,\ldots,\lambda_k$: reelle Nullstellen;
$\lambda_{k+1},\overline{\lambda}_{k+1},\ldots,\lambda_l,\overline{\lambda}_l$ nichtrelle Nullstellen, $\beta_j := -2\mathrm{Re}(\lambda_j)$, $\gamma_j := |\lambda_j|^2$).

8.24 Relle Partialbruchzerlegung: Sind P, Q teilerfremde reelle Polynome mit $\mathrm{Grad}\,P < \mathrm{Grad}\,Q$, und hat Q die oben stehende relle Zerlegung, dann kann $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ als Summe von Termen der Form

$$\frac{a}{(x-\lambda_j)^i} \quad (j=1,\ldots,k; 1\leq i\leq n_j), \qquad \frac{bx+c}{(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^i} \quad (j=k+1,\ldots,l; 1\leq i\leq n_j)$$

dargestellt werden.

Berechnung durch

1) Zuhaltemethode,

2) Einsetzen verschiedener x-Werte führt auf lineares Gleichungssystem.

3) Hauptnenner und Koeffizientenvergleich,

8.25 Beispiele: **1)** $Q(x) = (x-1)^4(x+2)(x-(1+\mathrm{i}))^3(x-(1-\mathrm{i}))^3$, P Polynom mit $\mathrm{Grad}\,P \leq 10$, $P(1)\neq 0$, $P(-2)\neq 0$, $P(1\pm\mathrm{i})\neq 0$:

$(x-(1+\mathrm{i}))\,(x-(1-\mathrm{i})) = x^2+2x+4$. Also gibt es Konstanten, so dass

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} \;&=\; \frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{(x-1)^2}+\frac{a_3}{(x-1)^3}+\frac{a_4}{(x-1)^4}+\frac{b}{x+2}\\ &\quad+\frac{c_1\,x+d_1}{x^2-2x+4}+\frac{c_2\,x+d_2}{(x^2-2x+4)^2}+\frac{c_3\,x+d_3}{(x^2-2x+4)^3}\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}\frac{x^4+x^3+x}{x^3+1} \;&=\; x+1-\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{-\frac{1}{3}\,x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\\ &=\; x+1-\frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1}+\frac{1}{6}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \frac{x^4+x^3+x}{x^3+1}\,\mathrm{d}x&\\ =\; \frac{x^2}{2}+x-\frac{1}{3}\,\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{3}}\arctan\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+c&\end{aligned}$$

8.5 Uneigentliche Integrale

Ziel: Erweiterung des Integralbegriffs auf unbeschränkte Intervalle und unbeschränkte Funktionen.

8.26 Definition: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ beliebiges Intervall; $f : I \to \mathbb{R}$ heißt **lokal integrierbar**, falls die Einschränkung von f auf jedes Intervall $[a, b] \subseteq I$ integrierbar ist.

8.27 Beispiele: **1)** $f : I = [0, \infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ ist lokal intergrierbar.

2) $f : I =]0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ist lokal integrierbar.

3) Ist $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann ist f auf I lokal integrierbar.

8.28 Definition: Sei $I = [a, b[\,,\ -\infty < a < b \leq \infty$, $f : I \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Dann heißt f **uneigentlich integrierbar** über I, falls

$$\lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \ =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. Wir sagen auch: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **konvergiert**.

Falls der Grenzwert für $\beta \uparrow b$ nicht existiert: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ **divergiert**.

Genauso: $I =]a, b]$, $-\infty \leq a < b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$I =]a, b[\,,\ -\infty \leq a < b \leq \infty$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ := \ \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^c f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta \uparrow b} \int_c^\beta f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad c \in]a, b[\text{ beliebig.}$$

8.29 Beispiele: **1)** $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \ = \ 1.$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \ = \ \pi.$

3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ ist divergent

4) $$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x \ = \ \begin{cases} \dfrac{1}{s-1} & \text{für } s > 1, \\ \text{divergent} & \text{für } s \leq 1. \end{cases}$$

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{1-s} & \text{für } s<1, \\ \text{divergent} & \text{für } s \geq 1. \end{cases}$

8.30 Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale: Sei $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ lokal integrierbar. Falls

$$\big(\forall x \in [a,b[: |f(x)| \leq g(x)\big) \;\wedge\; g \text{ über } [a,b[\text{ uneigentlich integrierbar,}$$

dann ist auch f uneigentlich integrierbar über $[a,b[$.
Entsprechend für uneigentliche Integrale über $]a,b]$ oder $]a,b[$.

Beweis: Sei (x_n) Folge in $[a,b[$, $x_n \uparrow b$ und $y_n := \displaystyle\int_a^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x$. Für $n > m$ gilt

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| \;&=\; \left|\int_{x_m}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\leq\; \int_{x_m}^{x_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq\; \int_{x_m}^{x_n} g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^{x_n} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{x_m} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &<\; \varepsilon \qquad \text{für } n > m > N_\varepsilon. \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (y_n) ist Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, also konvergent.

Genauso zeigt man: Ist $(\widetilde{x}_n)$ eine weitere Folge in $[a,b[$ mit $x_n \uparrow b$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{\widetilde{x}_n} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{n\to\infty} y_n.$$

$\square$

8.31 Beispiele: **1)** $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergiert für $s<1$, divergiert für $s \geq 1$.

2) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x.$

8.32 Integralkriterium für Reihen: Sei $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ monoton fallend. Dann gilt:

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konvergiert.}$$

Beweis: (i) "$\Rightarrow$":

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^m f(n) \;&\leq\; \int_1^m f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow\; \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ ist beschränkt} \\ &\overset{f(n)\geq 0}{\Rightarrow}\; \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ ist konvergent} \end{aligned}$$

(ii) "$\Leftarrow$": Definiere $g(x) := f(n)$ für $n \le x < n+1$.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 \le f(x) \le g(x) \\ \displaystyle\int_1^\infty g(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ ist konvergent} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ ist konvergent.}$$

□

8.33 Beispiel: $\sum \frac{1}{n^s}$ ist konvergent für $s > 1$ und divergent für $s \le 1$.

8.6 Parameterabhängige Integrale

8.34 Beispiele: **1)** $\displaystyle\int_1^2 \sin(tx)\,\mathrm{d}x \;=\; \begin{cases} \frac{1}{t}(\cos t - \cos 2t) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$

2) Für $t \neq 0$: $\displaystyle\int_t^{1/t} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \;=\; \mathrm{e}^{1/t} - \mathrm{e}^t$.

8.35 Satz: Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$, $I(t) := \displaystyle\int_a^b f(t,x)\,\mathrm{d}x$. Dann gilt

$$I'(t) \;=\; \int_a^b \partial_1 f(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

(Ableitung und Integration sind vertauschbar)

8.36 Folgerung: Seien $\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$, $I(t) := \displaystyle\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t,x)\,\mathrm{d}x$. Dann gilt

$$I'(t) \;=\; \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \partial_1 f(t,x)\,\mathrm{d}x + f(t,\beta(t))\,\beta'(t) - f(t,\alpha(t))\,\alpha'(t).$$

Beweis: Setze $F(u_1,u_2,u_3) := \displaystyle\int_{u_1}^{u_2} f(u_3,x)\,\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1 F(u_1,u_2,u_3) &=& -f(u_3,u_1) \\ \partial_2 F(u_1,u_2,u_3) &=& f(u_3,u_2) \\ \partial_3 F(u_1,u_2,u_3) &=& \int_{u_1}^{u_2} \partial_1 f(u_3,x)\,\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

Kettenregel 7.27 anwenden auf $I(t) = F(\alpha(t),\beta(t),t)$:

$$I'(t) \;=\; (\partial_1 F)\,\alpha'(t) + (\partial_2 F)\,\beta'(t) + (\partial_3 F)\,1.$$

□

8.37 Beispiel: $I(t) = \displaystyle\int_{\sqrt{t}}^{t^2} \mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x \;\Rightarrow\; I'(t) = \int_{\sqrt{t}}^{t^2} (-x^2)\mathrm{e}^{-tx^2}\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{-t^5}\,2t - \mathrm{e}^{-t^2}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}$

8.7 Einführung in die numerische Integration

Problem: $\int\limits_a^b f$ nicht explizit berechenbar (z.B. $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$).

1. Idee (Interpolation): Wähle **Stützstellen** $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, berechne Interpolationspolynom P_n durch $(x_j, f(x_j))$ und hoffe $\int_a^b f \approx \int_a^b P_n$.

8.38 Definition: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Das Polynom P_n n-ten Grades mit

$$P(x_j) \;=\; f(x_j), \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n$$

heißt **Interpolationspolynom** zu f und $\{x_0, \ldots, x_n\}$.

Existenz: Sei $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Bestimme die Koeffizienten a_j als Lösung von

$$P(x_j) = f(x_j) \;\Leftrightarrow\; a_0 + a_1 x_j + \ldots + a_n x_j^n = f(x_j) \qquad (j = 0, \ldots, n).$$

Dies ist ein LGS mit $n+1$ Gleichungen für $n+1$ Unbekannte.

Aus dem Identitätssatz 2.67 wissen wir: Es gibt höchstens eine Lösung. Für unser LGS bedeutet das: Die Koeffizientenmatrix hat Höchstrang. Oder anders

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} \;\neq\; 0.$$

$\Rightarrow$ Die Koeffizientenmatrix ist invertierbar
$\Rightarrow$ Es existiert eine eindeutige Lösung

8.39 Satz: Sei $f \in C^{n+1}([a,b] \to \mathbb{R})$, P_n das Interpolationspolynom zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ und $R_n := f - P_n$. Dann gibt es ein $\xi \in]a,b[$, so dass

$$R_n(x) \;=\; \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi) \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Insbesonder kann der Fehler R_n abgeschätzt werden durch

$$|R_n(x)| \;\leq\; \frac{1}{(n+1)!} \max_{t\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(t) \right| \prod_{j=0}^{n} |x - x_j|.$$

Beweis: Sei $\omega(x) := \prod_{j=0}^{n}(x - x_j) = x^{n+1} + c_n x^n + \ldots + c_0 \;\Rightarrow\; \omega^{(n+1)}(x) = (n+1)!$.

Für festes $x \in [a,b],\; x \neq x_0, \ldots, x_n$ betrachte

$$\varphi(t) \;:=\; R_n(t) - \frac{R_n(x)}{\omega(x)}\,\omega(t).$$

Wegen $R_n(x_j) = 0,\; \omega(x_j) = 0$ für $j = 0, \ldots, n$ gilt

$$\varphi(x_0) = 0,\; \ldots,\; \varphi(x_n) = 0,\; \varphi(x) = 0.$$

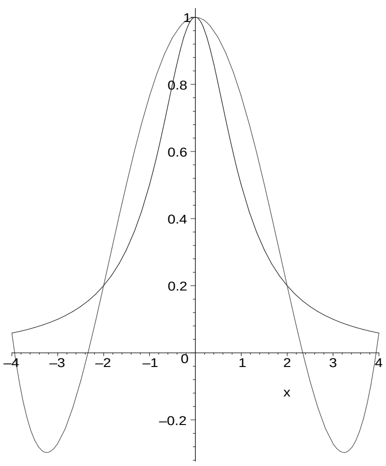
Also hat φ mindestens $n+2$ verschiedene Nullstellen in $[a,b]$.

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{Satz von Rolle}}{\Rightarrow} && \varphi' \text{ hat mindestens } n+1 \text{ verschiedene Nullstellen in }]a,b[\\
&\Rightarrow && \varphi'' \text{ hat mindestens } n \text{ verschiedene Nullstellen in }]a,b[\\
& && \quad\vdots\\
&\Rightarrow && \varphi^{(n+1)} \text{ hat mindestens eine Nullstelle in }]a,b[\\
& && \text{d.h. } \exists \xi \in]a,b[: 0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = \underbrace{R_n^{(n+1)}(\xi)}_{=(f-P_n)^{(n+1)} = f^{(n+1)}} - \frac{R_n(x)}{\omega(x)}\,(n+1)!\\
&\Rightarrow && f^{(n+1)}(\xi) = \frac{R_n(x)}{\omega(x)}\,(n+1)!
\end{aligned}$$

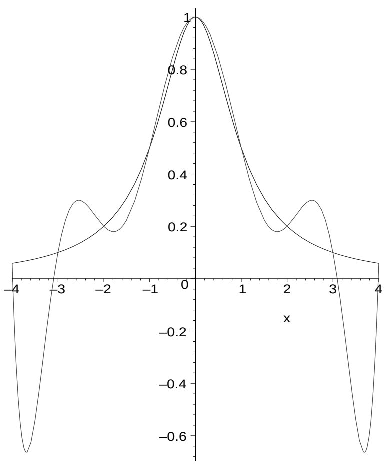
□

8.40 Die große Enttäuschung: $f : [-4,4] \to \mathbb{R} : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$:

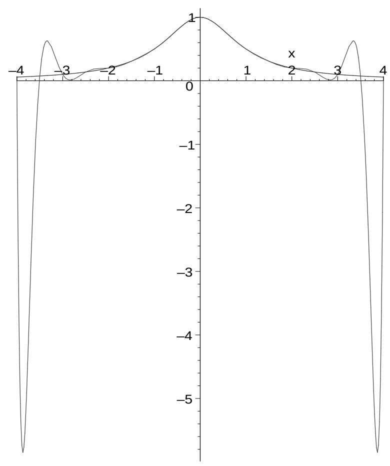
5 Stützstellen



9 Stützstellen



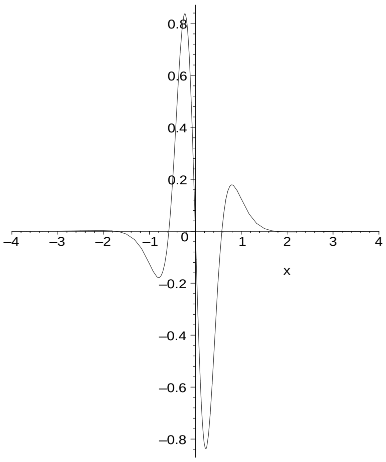
17 Stützstellen



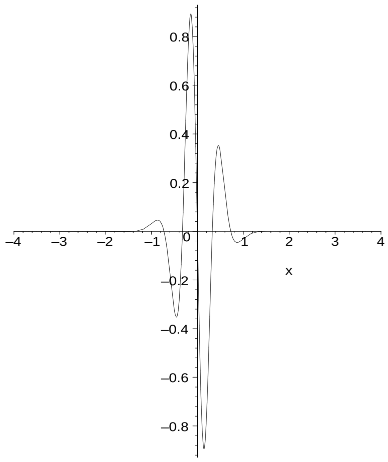
Mit wachsender Anzahl der Stützstellen wird die Approximation schlechter. Warum?

Bestimme Maximum von $\dfrac{1}{(n+1)!}\,\left|f^{(n+1)}(x)\right|$:

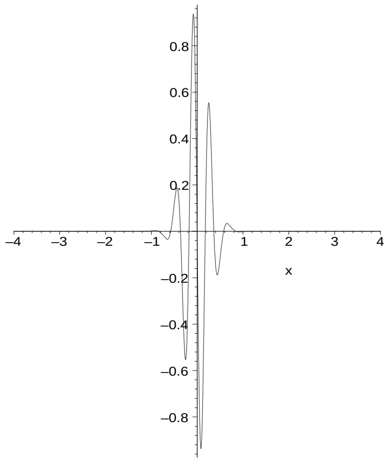
$n = 4$



$n = 8$

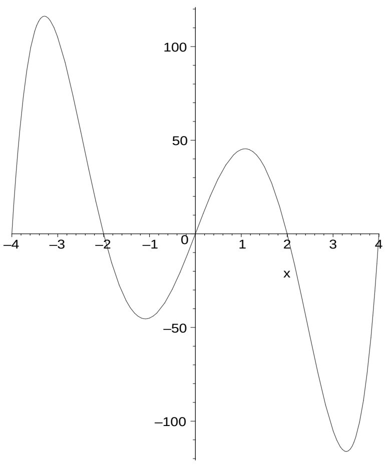


$n = 16$

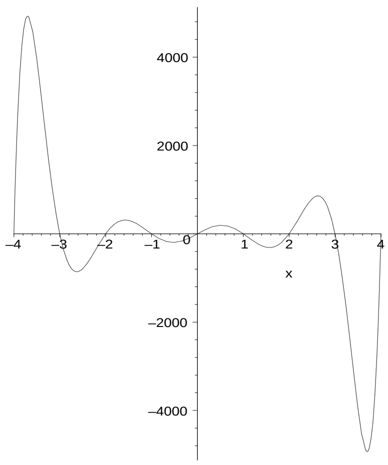


Bestimme $\displaystyle\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|$:

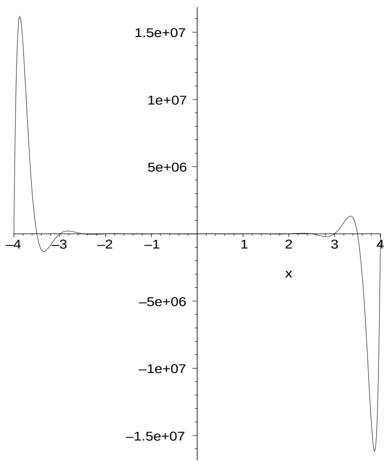
$n = 4$



$n = 8$



$n = 16$



8.41 Bemerkung: Man kann die Stützstellen geschickter wählen (nicht äquidistant), damit das Polynom $\displaystyle\prod_{j=0}^{n} |x - x_j|$ nicht so groß wird (Nullstellen von Tschebyscheff-Polynomen).

Man beschränkt sich deshalb auf Polynome kleiner Ordnung.

Zunächst der Fall $n = 1$, d.h. f wird durch ein Polynom 1. Grades („Gerade“) approximiert:

8.42 Satz: Sei $f \in C^2([a,b] \to \mathbb{R})$. Dann gilt die **Trapezregel**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b-a}{2}\big(f(a)+f(b)\big) + R \quad \text{mit } |R| \;\leq\; \frac{(b-a)^3}{12}\,\|f''\|_\infty\,.$$

Beweis: $|R| \overset{8.39}{\leq} \dfrac{1}{2!} \max|f''(t)| \underbrace{\int_a^b |x-a|\,|x-b|\,\mathrm{d}x}_{=\frac{(b-a)^3}{6}}.$ □

Der Fall $n = 2$, dh. f wird durch ein Polynom 2. Grades („Parabel") approximiert:

8.43 Satz: Es sei $f \in C^4([a,b] \to \mathbb{R})$. Dann gilt die **Simpson-Formel** (Keplersche Fassregel):

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) + R \text{ mit } |R| \;\leq\; \frac{(b-a)^5}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty.$$

2. Idee (Summation): Unterteile $[a,b]$ in Teilintervalle $[a, a+h], [a+h, a+2h], \ldots, [b-h, b]$, wende in jedem Teil die Trapezregel (oder Simpson-Formel) an.

8.44 Satz: Sei $f \in C^2([a,b])$, $h := \dfrac{b-a}{k}$ mit einem $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b f \;&=\; T(h) + R \;:=\; \frac{h}{2}\left(f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \ldots + 2f(b-h) + f(b)\right) + R,\\ |R| \;&\leq\; (b-a)\,\frac{h^2}{12}\,\|f''\|_\infty\end{aligned}$$

(**summierte Trapezregel**).

8.45 Diskussion: **1)** Der Fehler ist von Ordnung $h^2 = \dfrac{(b-a)^2}{k^2}$ (k = Anzahl der Teilintervalle).

2) Wählt man $h = \dfrac{b-a}{2^l}$, so kann man Rechenoperationen beim Übergang von l auf $l+1$ sparen, da die alten Stützstellen beibehalten werden.

3) Man könnte auch Simpson summieren.

3. Idee Romberg-Extrapolation (genial!): Beweise eine genauere Fehlerabschätzung

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; T(h) + c_1 h^2 + c_2 h^4 + \ldots + h^{2k} \cdot \rho(h)$$

mit beschränkten $\rho(h)$ für $h \downarrow 0$ (Taylorentwicklung).

$$\Rightarrow \int_a^b f \;=\; T\left(\frac{h}{2}\right) + c_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{h}{2}\right)^{2k} \cdot \rho\left(\frac{h}{2}\right).$$

Subtraktion der ersten Abschätzung von 4-mal der zweiten eliminiert den 1. Fehlerterm:

$$3\int_a^b f \;=\; 4\,T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) + c_2\left(\frac{4}{16} - 1\right)h^4 + \ldots.$$

Also Verfahren:

$$\begin{array}{lllllllll}
T_0 & := & T(b-a) & & & & & & \\
T_1 & := & T\left(\dfrac{b-a}{2}\right) & T_1^{(1)} & := & \dfrac{4\,T_1 - T_0}{3} & & & \\
T_2 & := & T\left(\dfrac{b-a}{4}\right) & T_2^{(1)} & := & \dfrac{4\,T_2 - T_1}{3} & T_2^{(2)} & := & \dfrac{4^2\,T_2^{(1)} - T_1^{(1)}}{4^2-1} \\
 & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \ddots
\end{array}$$

Dieses Verfahren liefert gute Ergebnisse, wenn f genügend oft differenzierbar ist.

Für ein Beispiel siehe Meyberg/Vachenauer.

9 Gewöhnliche Differentialgleichungen

9.1 Beispiele

1) Heißer Tee mit Temperatur $y(t)$ (t = Zeit), die Außentemperatur $y_{\text{außen}}$ sei konstant.

Physik: Der Verlauf von $y(t)$ ist bestimmt durch:

a) Anfangstemperatur y_0: $y(0) = y_0$,

b) Abfließen der Wärme: $$\underbrace{y'(t)}_{\text{Änderung der Temperatur}} = -\underbrace{\alpha\big(y(t) - y_{\text{außen}}\big)}_{\text{abfließende Wärme } (\alpha > 0)}$$

Mathematik:

Zu b) Seien $\alpha, y_{\text{außen}} \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Die Differentialgleichung

$$y'(t) = -\alpha\big(y(t) - y_{\text{außen}}\big)$$

besitzt die Lösungen $y(t) = c\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + y_{\text{außen}}$ ($c \in \mathbb{R}$ beliebig):
Einsetzen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{linke Seite:} & y'(t) = -\alpha c\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \\ \text{rechte Seite:} & -\alpha\big(y(t) - y_{\text{außen}}\big) = -\alpha c\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{stimmt} \\ \text{überein} \end{array}$$

Zu a) $y_0 \stackrel{!}{=} y(0) = c\,\mathrm{e}^0 + y_{\text{außen}} = c + y_{\text{außen}} \;\Rightarrow\; c = y_0 - y_{\text{außen}}$

Mathematik bestätigt Physik:

Sind $\alpha, y_{\text{außen}}, y_0 \in \mathbb{R}$ vorgegeben, so ist der Temperaturverlauf eindeutig:

$$y(t) \;=\; (y_0 - y_{\text{außen}})\,\mathrm{e}^{-\alpha t} + y_{\text{außen}}.$$

9.1 Beobachtung: Die Differentialgleichung hat unendlich viele Lösungen. Die Anfangsbedingung $y(0) = y_{\text{außen}}$ „wählt“ die richtige aus.

Für eine eindeutige Lösung werden Differentialgleichung und Anfangsbedingung benötigt.

2) Senkrechter Wurf (eines Steins) nach oben: Sei $y(t)$ die Höhe des Steins über dem See.
Physik: Beschreibung der Bewegung $y(t)$ durch

a) Startpunkt $\quad y(0) = h$

b) Startgeschwindigkeit $\quad y'(0) = v$

c) Einwirkung der Gewichtskraft: $\quad \underbrace{m\,y''(t)}_{\text{Trägheitskraft}} = \underbrace{-m\,g}_{\text{Gewichtskraft}}$

Mathematik:

Zu c) $y''(t) = -g \;\Leftrightarrow\; y'(t) = -g\,t + c_1 \;\Leftrightarrow\; y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + c_1\,t + c_2.$

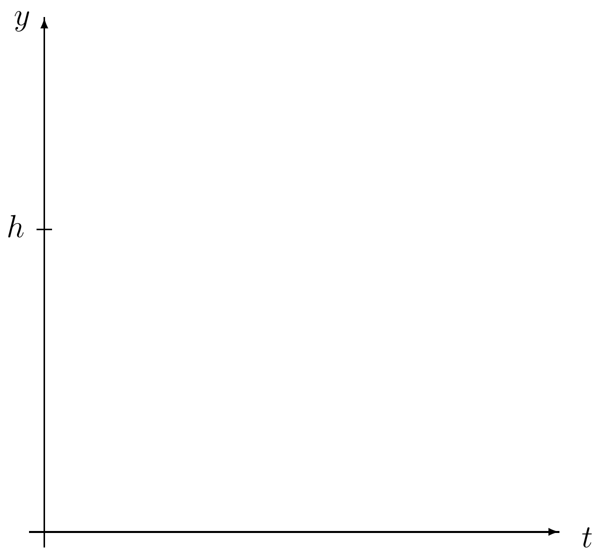
Die Differentialgleichung besitzt unendlich viele Lösungen

$$y(t) \;=\; -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + c_1\,t + c_2 \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Zu a) $h \overset{!}{=} y(0) = -\frac{1}{2}\,g \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = h$

Zu b) $v \overset{!}{=} y'(0) = -g \cdot 0 + c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = v.$

$\Rightarrow$ Eindeutige Lösung $y(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v\,t + h.$



Höchster Punkt:

$$y'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; -g\,t + v = 0 \;\Leftrightarrow\; t = \frac{v}{g}$$

$$\Rightarrow\; y_{\max} \;=\; -\frac{g}{2}\left(\frac{v}{g}\right)^2 + v\,\frac{v}{g} + h \;=\; \frac{v^2}{2g} + h.$$

Eintauchzeitpunkt:

$$0 = y(t) = -\frac{g}{2}\,t^2 + v\,t + h \Rightarrow \ldots$$

In y' eingesetzt: Eintauchgeschwindigkeit.

9.2 Beobachtung: Die Differentialgleichung hat unendlich viele Lösungen. Die Anfangsbedingung $y(0) = h \;\wedge\; y'(0) = v$ „wählt“ die richtige aus.

Für eine eindeutige Lösung werden Differentialgleichung und Anfangsbedingung benötigt.

9.3 Definition: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

1) Die Gleichung

$$y^{(n)}(x) \;=\; \underbrace{f\big(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big)}_{\text{Term, der von } x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x) \text{ abhängen darf}} \qquad \text{für } x \in I \tag{$*$}$$

für die unbekannte Funktion y heißt (explizite) **gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung**. Eine n-mal stetig differenzierbare Funktion y, die diese Gleichung erfüllt, heißt **Lösung**.

2) Seien $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$ gegeben. Die Bedingung

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \ \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \tag{$**$}$$

heißt **Anfangsbedingung** (n-ter Ordnung).

3) $(*) + (**)$ heißt **Anfangswertproblem** (n-ter Ordnung).

9.4 Bemerkungen: **1)** n-ter Ordnung: Die höchste auftretende Ableitung ist $y^{(n)}$.

2) Die Differentialgleichung heißt gewöhnlich, weil y nur von $x \in \mathbb{R}^1$ abhängt (y hängt von $x \in \mathbb{R}^n$ ab: partielle Differentialgleichung).

3) Abkürzende Schreibweise: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

4) Es gibt auch implizite Differentialgleichung, z.B. $(y'' + x)^2 - y = 0$.

5) Es gibt keine allgemeine Theorie zur Lösung von Differentialgleichungen. Im Folgenden: Verfahren für einige spezielle Typen von Differentialgleichungen.

9.5 Beispiele: **1)** $y^{(4)} = \underbrace{(x+y)^2 \cdot y' - y'''}_{=f(x,y,y',y'',y''')}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$, $y''(1) = 2$, $y'''(1) = 3$ (Anfangswertproblem 4. Ordnung). Lösung?

2) $y' = 2xy$, $y(0) = -1$: Lösung $y(x) = -\mathrm{e}^{x^2}$.

Beobachtungen:

a) Die Lösung ist auch „links von der Anfangsbedingung" definiert. Oft wird kein Intervall für die Differentialgleichung angegeben. Bei Konstruktion der Lösung wird das Intervall mitgeliefert.

b) Die Lösung existiert für alle $x \in \mathbb{R}$: **globale Lösung**.

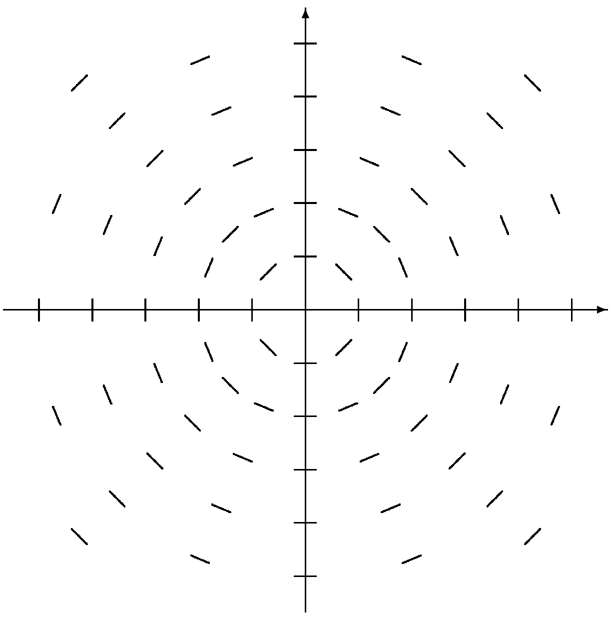
3) $y' = 1 + y^2$, $y\big(\frac{\pi}{4}\big) = 1$: Lösung $y(x) = \tan x$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$: **lokale Lösung**.

9.6 Geometrische Veranschaulichung: Eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$$

hat im Punkt (x_0, y_0) die Steigung $y' = f(x_0, y_0)$.

Z.B. $y' = -\dfrac{x}{y}$: Man kann die Lösungssteigungen einzeichnen (**Richtungsfeld**) und den Lösungsverlauf „erraten“ oder numerisch berechnen ($\longrightarrow$ NumStoch, 3. Semester)



Vermutung:
Die Lösungen sind Halbkreise
$y(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2} = \pm(r^2 - x^2)^{1/2}$
für $-r < x < r$.
Nachrechnen:
$y'(x) = \pm\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{(r^2 - x^2)^{1/2}}\,(-2x) = -\dfrac{x}{y}.$

9.2 Ein paar Lösungsmethoden

9.2.1 Nur integrieren

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x), \qquad x \in [a, b] \\ \overset{f \text{ stetig}}{\Leftrightarrow} \quad y(x) &= \underbrace{\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + c}_{\text{dies sind alle Lösungen}} \end{aligned}$$

Durch Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist c eindeutig bestimmt.

9.2.2 Trennung der Variablen

9.7 Definition: Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Differentialgleichung

$$y' \;=\; f(y) \cdot g(x)$$

heißt **separierbare Differentialgleichung**.

9.8 Beispiele: $y' = \underbrace{2x}_{g(x)} \cdot \underbrace{\cos y}_{f(y)}$ ist separierbar

$y' = 1 + y^2 = \underbrace{1}_{g(x)} \cdot \underbrace{(1+y^2)}_{f(y)}$ ist separierbar

$y' = 2x + \cos y$ ist nicht separierbar

9.9 Lösung durch Trennung der Variablen: **1)** Wo ist $f(y) = 0$?

$f(\eta) = 0 \;\Rightarrow\; y = \text{const} = \eta$ ist Lösung („spezielle Lösung").

2) Sei $y(x) \notin \{\eta : f(\eta) = 0\}$.

$$
\begin{aligned}
y' = f(y)\,g(x) \;&\Leftrightarrow\; \frac{y'}{f(y)} = g(x) \qquad \text{(Variablen getrennt!)}\\
&\Leftrightarrow\; \underbrace{\int \frac{y'(x)}{f(y(x))}\,\mathrm{d}x}_{} = \int g(x)\,\mathrm{d}x\\
&\overset{u=y(x)}{=} \left[\int \frac{1}{f(u)}\,\mathrm{d}u\right]_{u=y(x)} = [H(u)]_{u=y(x)} + c \quad \left(H' = \frac{1}{f}\right)\\
&\Leftrightarrow\; H(y(x)) = \int g(x)\,\mathrm{d}x = G(x) + c \quad (G' = g)\\
&\Leftrightarrow\; y(x) = H^{-1}\big(G(x) + c\big)
\end{aligned}
$$

(Da $H'(u) = \dfrac{1}{f(u)} \neq 0$, ist H lokal streng monoton, also invertierbar)

Also „Kochrezept" für die separierbare Differentialgleichung $y'(x) = f(y) \cdot g(x)$:

I) $f(\eta) = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = \eta$ ist (spezielle) Lösung. **nicht vergessen!**

II) Für $y \notin \{\text{Nullstellen von } f\}$:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y) \cdot g(x)\\
\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{f(y)} &= \int g(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Löse entstehende Gleichung nach y auf.

III) Allgemeine Lösung aus 1) und 2).

IV) Freie Konstante bestimmen: Allgemeine Lösung in Anfangsbedingung einsetzen.

9.10 Beispiele: **1)** $y' = \underbrace{-x}_{g(x)} \cdot \underbrace{y^2}_{f(y)}$:

I) Spezielle Lösung $y(x) = 0$.

II) $y \neq 0$: $y(x) = \dfrac{2}{x^2 + c}$, $c \in \mathbb{R}$.

III) Allgemeine Lösung: $y = \dfrac{2}{x^2+c}$, $c \in \mathbb{R}$ oder $y = 0$.

IV) Für die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ folgt:

Fall $\boldsymbol{y_0 = 0}$: Gesuchte Lösung ist $y(x) = 0$.

Fall $\boldsymbol{y_0 \neq 0}$: Gesuchte Lösung ist $y(x) = \dfrac{2}{x^2 + \frac{2}{y_0} - x_0^2}$.

Also: Durch jeden Punkt der x, y - Ebene geht genau eine Lösung, d.h. für beliebige $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = -x\,y^2 \quad \wedge \quad y(x_0) = y_0$$

genau eine Lösung.

Manche Lösungen sind global, manche lokal:

$$\begin{aligned} y(1) &= 1 \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{2}{x^2+1} \text{ für } x \in \mathbb{R}: \text{ globale Lösung} \\ y(2) &= 1 \;\Rightarrow\; y(x) = \frac{2}{x^2-2} \text{ für } x > \sqrt{2}: \text{ lokale Lösung} \end{aligned}$$

2) $y' = |y-1|^{1/2}$: $f(y) = |y-1|^{1/2}$, $g(x) = 1$.

Allgemeine Lösung:
$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + \frac{1}{4}(x+c)^2 \qquad \text{für } x > -c \ (c \in \mathbb{R}) \\ y(x) &= 1 - \frac{1}{4}(x+c)^2 \qquad \text{für } x < -c \ (c \in \mathbb{R}) \\ y(x) &= 1 \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Achtung: Das Anfangswertproblem $y' = |y-1|^{1/2}$, $y(1) = 2$ besitzt unendlich viele Lösungen: Jede der Funktionen

$$y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4}\,(x+1)^2 & \text{für } x > -1, \\ 1 & \text{für } -c \le x \le -1, \\ 1 - \frac{1}{4}(x+c)^2 & \text{für } x < -c \end{cases}$$

($c \le 1$ beliebig) ist Lösung. Im Intervall $[1, \infty[$ ist der Lösungsverlauf eindeutig. Dies ist der Bereich, in dem $y(x) \ge 1$ ist.

9.2.3 Die Ähnlichkeitsdifferentialgleichung $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$

Sei y Lösung von

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Definiere $u : x \mapsto \dfrac{y(x)}{x}$. Welche Differentialgleichung erfüllt u?

$$\begin{aligned} u' &= \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y' - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\right) \\ \Leftrightarrow\; u' &= \frac{1}{x}\,(f(u) - u) \end{aligned}$$

Hurra! Die entstehende Differentialgleichung ist separierbar.

Also Lösungsverfahren für $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$:
- Setze $u := \frac{y}{x}$,
- löse Differentialgleichung $u' = \frac{1}{x}\,(f(u) - u)$,
- Rücksubstitution $y(x) = x \cdot u(x)$.

9.11 Beispiel: $y' = \frac{1}{4} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$ (nicht separierbar).

$u(x) := \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; u'(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{4} + u^2 - u\right)$.

Allgemeine Lösung $u(x) = \frac{1}{2}$ oder $u(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{-\ln|x| + c}$ $(c \in \mathbb{R})$.

Rücksubstitution: $y(x) = \frac{1}{2}x$ oder $y(x) = x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{-\ln|x| + c}\right)$ $(c \in \mathbb{R})$

9.2.4 Die Differentialgleichung $\boldsymbol{y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)}$

Fall 1: $\alpha = \beta = 0$, also $y' = f(Ax + By + C)$:

Die Substitution $u(x) := Ax + By(x) + C$ führt auf

$$u' \;=\; A + By' = A + Bf(u) \qquad \text{(separierbar).}$$

Fall 2: $\alpha \neq 0$ oder $\beta \neq 0$

Fall 2a: $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ (Zeilen sind linear abhängig)

Also: $y' = f\left(\frac{\lambda\alpha\, x + \lambda\beta\, y + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$

Substitution $u(x) := \alpha x + \beta y \;\Rightarrow\; u' = \alpha + \beta y' = \alpha + \beta f\left(\frac{\lambda u + c}{u + \gamma}\right)$ (separierbar)

Fall 2b: $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$: Transformation $\tilde{x} := x + \xi,\ \tilde{y} := y + \eta$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} &= \frac{a\,(\tilde{x} - \xi) + b\,(\tilde{y} - \eta) + c}{\alpha\,(\tilde{x} - \xi) + \beta\,(\tilde{y} - \eta) + \gamma} \\
&= \frac{a\,\tilde{x} + b\,\tilde{y} + c - a\,\xi - b\,\eta}{\alpha\,\tilde{x} + \beta\,\tilde{y} + \gamma - \alpha\,\xi - \beta\,\eta} \\
&= \frac{a\,\tilde{x} + b\,\tilde{y}}{\alpha\,\tilde{x} + \beta\,\tilde{y}} \qquad \text{falls} \qquad \begin{aligned} a\xi + b\eta &= c \\ \alpha\xi + \beta\eta &= \gamma \end{aligned}
\end{aligned}$$

Seien ξ, η Lösung dieses LGS (existiert wegen $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$).

Neue Differentialgleichung: $\tilde{y}' := \frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{d\tilde{y}}{dx} \cdot \frac{dx}{d\tilde{x}} = y' \cdot 1$

$$\Rightarrow\; \tilde{y}' = f\left(\frac{a\tilde{x} + b\tilde{y}}{\alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y}}\right) \overset{\text{falls } \tilde{x} \neq 0}{=} f\left(\frac{a + b\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{\alpha + \beta\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}\right) \qquad \text{(Ähnlichkeitsdifferentialgleichung)}$$

9.12 Beispiele: **1)** $y' = -\dfrac{4x+3y-1}{3x+4y+1}$: $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 9 = 7 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{rcr} 4\,\xi + 3\,\eta & = & -1 \\ 3\,\xi + 4\,\eta & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \ \xi = -1, \ \eta = 1$$

Transformation $\tilde{x} = x - 1, \ \tilde{y} = y + 1$

$$\tilde{y}' \ = \ -\frac{4\,\tilde{x} + 3\,\tilde{y}}{3\,\tilde{x} + 4\,\tilde{y}} \overset{\text{falls } \tilde{x} \neq 0}{=} -\frac{4 + 3\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}{3 + 4\dfrac{\tilde{y}}{\tilde{x}}}$$

Lösung als Übung.

2) $y' = \dfrac{1}{x+2y+3}$.

$$u := x + 2y + 3 \quad \Rightarrow \quad u' = 1 + \frac{2}{u}.$$

Aber diese Differentialgleichung ist nicht explizit lösbar.

9.3 Theorie

Es stellen sich drei Fragen:

1) Existiert eine Lösung?

2) Ist die Lösung eindeutig?

3) Hängt die Lösung stetig von den Anfangsdaten ab?

9.13 Hauptsatz über lokale Existenz (Picard (1890), Lindelöf (1894)): Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' \ = \ f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

und es gelte

1) f ist stetig im Rechteck $R := [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ und $M := \max_R |f(x,y)| > 0$,

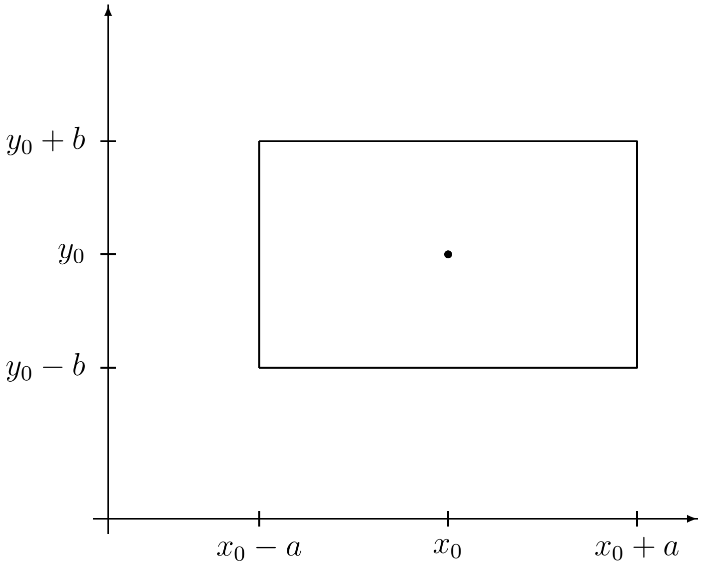
2) f genügt auf R einer **Lipschitz-Bedingung**:

$$\exists L > 0 \ \ \forall (x,y_1),(x,y_2) \in R : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem eine eindeutige lokale Lösung

$$y : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R} \text{ mit } h := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Veranschaulichung:



Wegen $|y'| \leq M$ befindet sich die Lösung in R.

Beweisskizze:

1) Äquivalente Integralgleichung:

$$y \in C\big([x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}\big) \ \wedge \ y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,\mathrm{d}t \qquad (**)$$

Behauptung: y Lösung von $(**)$ $\Leftrightarrow$

$$y \in C^1\big([x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbb{R}\big) \ \wedge \ y' = f(x, y) \ \wedge \ y(x_0) = y_0 \qquad (*)$$

"$\Leftarrow$": y Lösung von $(*)$ $\Rightarrow$

$$y(x) - y(x_0) \ = \ \int_{x_0}^{x} y'(t)\,\mathrm{d}t \ \overset{(*)}{=} \ \int_{x_0}^{x} f\big(t, y(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

"$\Rightarrow$": y Lösung von $(**)$ $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} y'(x) &= f\big(x, y(x)\big), \quad \text{insbesondere } y \in C^1\big(\ldots\big), \\ y(x_0) &= y_0 + \int_{x_0}^{x_0} \ldots\,\mathrm{d}t \ = \ y_0. \end{aligned}$$

Philosophie: Integralgleichungen sind besser zu behandeln als Differentialgleichungen.

2) Approximation: Definiere Folge (η_n) in $C\big([x_0 - h, x_0 + h]\big)$ durch

$$\begin{aligned} \eta_0(x) &:= y_0, \\ \eta_n(x) &:= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(t, \eta_{n-1}(t)\big)\,\mathrm{d}t, \qquad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Zeige: (η_n) ist Cauchy-Folge bezüglich $\|g\|_\infty := \max\limits_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |f(t)|$.
$\Rightarrow$ gleichmäßige Konvergenz $\eta_n \to y : x \mapsto \lim\limits_{n \to \infty} \eta_n(x)$.
Zeige: Dies ist die gesuchte Lösung.

9.14 Bemerkung: Dies ist Anwendung einer allgemeinen Methode: Ist Lösung y von $y = F(y)$ gesucht (Fixpunkt), versuche ob die rekursiv definierte Folge $y_n := F(y_{n-1})$ mit geeignet gewähltem y_0 gegen den Fixpunkt konvergiert (siehe Banachscher Fixpunktsatz).

9.15 Beispiele: **1)** $y' = -x \cdot y^2 =: f(x,y)$:

$$\begin{aligned} |f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= \left|x \cdot (y_1^2 - y_2^2)\right| = |x \cdot (y_1+y_2) \cdot (y_1 - y_2)| \\ &\le \underbrace{\left(\max_{x \in [x_0-a, x_0+a]} |x|\right)\left(\max_{y_1,y_2 \in [y_0-b, y_0+b]} |y_1+y_2|\right)}_{=\max\{|x_0-a|,|x_0+a|\}\cdot 2\cdot \max\{|y_0-b|,|y_0+b|\}=:L} \cdot |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Aus Satz: Das Anfangswertproblem $y' = -x \cdot y^2$, $y(x_0) = y_0$ besitzt für jedes $(x_0, y_0) \in G$ genau eine lokale Lösung.

2) $y' = |y-1|^{1/2} =: f(x,y)$. Für $y_1 = 1$ gilt keine Lipschitz-Bedingung:

$$\frac{|f(x,1) - f(x,y_2)|}{|1-y_2|} = \frac{|y_2 - 1|^{1/2}}{|1-y_2|} = \frac{1}{|1-y_2|^{1/2}} \to \infty \qquad \text{für } y_2 \to 1.$$

Dies erklärt, warum das Anfangswertproblem in Beispiel 9.10, Teil 2), unendlich viele Lösungen besitzt.

9.16 Bemerkung: Einerseits typisch Mathematiker: Existenz und Eindeutigkeit klar, aber keine allgemeine Lösungstheorie.

Andererseits: Wenn eine Lösung numerisch berechnet wird, muss man wissen, ob es eine gibt. Wenn sie nicht eindeutig ist, muss man überlegen, was der Computer berechnet.

9.17 Abhängigkeit vom Anfangswert: Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und genüge der (globalen) Lipschitzbedingung

$$\exists L > 0 \ \ \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \mathbb{R}^2 : |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|.$$

Sind $y, \tilde{y}$ zwei Lösungen von $y' = f(x,y)$, so gilt

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \ \le \ |y(x_0) - \tilde{y}(x_0)| \cdot \mathrm{e}^{L|x-x_0|},$$

d.h. eine Änderung des Anfangswertes $y(x_0)$ pflanzt sich höchstens exponentiell wachsend fort.

9.18 Beispiele: **1)** $y' = y =: f(x,y)$:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |y_1 - y_2| \Rightarrow L = 1.$$

Die Lösung y mit $y(x_0) = y_0$ ist gegeben durch $y(x) = y_0 \, \mathrm{e}^{x-x_0}$.

Sind $y, \tilde{y}$ zwei Lösungen mit $y(x_0) = y_0$, $\tilde{y}(x_0) = \tilde{y}_0$, so folgt

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = |y_0 - \tilde{y}_0| \, \mathrm{e}^{x-x_0} = \mathrm{e}^{L(x-x_0)}.$$

Der Abstand wächst exponentiell, wie im Satz angegeben.

2) Es kann auch besser sein: $y' = \dfrac{y}{x} =: f(x,y)$ in $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\}$:

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \;=\; \left|\frac{y_1 - y_2}{x}\right| \;\leq\; \frac{|y_1 - y_2|}{1} \;\Rightarrow\; L = 1.$$

Lösung y mit $y(x_0) = y_0$: $y(x) = \dfrac{y_0}{x_0}\, x$.

$$\Rightarrow\; |y(x) - \tilde{y}(x)| \;=\; \frac{|y_0 - \tilde{y_0}|}{x_0}\, |x|.$$

Hier wächst der Abstand nur linear.

9.4 Systeme von Differentialgleichungen

9.19 Beispiel: Gegeben sei das zeitabhängige Vektorfeld

$$f(t, x_1, x_2) \;=\; \begin{pmatrix} t\, x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Gesucht: Kurve γ, die für $t = 0$ in $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ startet, und an die das Vektorfeld tangential ist.

Eindeutige Lösung $\gamma : t \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2/2} \\ \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$.

9.20 Definition: **1)** Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^n$ heißt **Vektorfeld**.

2) Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq I \times D \to \mathbb{R}^n$ ein zeitabhängiges Vektorfeld. Die Gleichung

$$y'(t) \;=\; f(t, y(t))$$

für die Unbekannte $y : I \supseteq I' \to \mathbb{R}^n$ heißt **System von Differentialgleichungen 1. Ordnung** oder kurz **System 1. Ordnung**.

3) Sei $t_0 \in I$, $y_0 \in D$. Die Bedingung

$$y(t_0) \;=\; y_0$$

heißt **Anfangsbedingung**.

9.21 Picard-Lindelöf: Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supseteq I \times D \to \mathbb{R}^n$ ein zeitabhängiges Vektorfeld und $(t_0, y_0) \in I \times D$. Weiter gelte:

1) f ist stetig im Quader $R := [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ und $M := \max\limits_{R} \|f(t,y)\| > 0$,

2) f genügt auf R einer **Lipschitz-Bedingung**:

$$\exists L > 0 \;\; \forall (t, y_1), (t, y_2) \in R : \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|.$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y' \;=\; f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0,$$

eine eindeutige lokale Lösung.

9.5 Lineare Systeme

Im Folgenden sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall

9.22 Definition: Sei $A : I \to \mathbb{R}^{(n^2)}$ eine $n \times n$-Matrix mit zeitabhängigen Einträgen und $g : I \to \mathbb{R}^n$. Das System

$$y'(t) \; = \; A(t)\, y(t) + g(t) \qquad (\text{oder } y' = A(t)y + g(t)\ )$$

für $y : I \to \mathbb{R}^n$ heißt **lineares System** (von Differentialgleichungen 1. Ordnung).
Ist $g = 0$, so heißt das System **homogen**, sonst **inhomogen**.

9.23 Beispiel: $y'(t) \; = \; \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} y(t) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & \frac{1}{t}\, y_1 + y_2 \\ y_2' & = & \frac{1}{t}\, y_2 \end{array} \right.$

9.24 Satz: Sind A und g stetig auf I und $y_0 \in \mathbb{R}^n$, so besitzt das Anfangswertproblem

$$y' \; = \; A(t)\, y + g(t), \quad y(t_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung $y \in C^1(I \to \mathbb{R}^n)$. Insbesondere: Ist $I = \mathbb{R}$, so ist die Lösung global, d.h. es gilt $y \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n)$.

9.5.1 Homogene Systeme

Für $A : I \to \mathbb{R}^{(n^2)}$ betrachte das homogene System

$$y' \; = \; A(t)\, y. \qquad (*)$$

9.25 Satz: **1)** Sind $y_{[1]}, y_{[2]}$ Lösungen von $(*)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $y := \alpha \cdot y_{[1]} + \beta \cdot y_{[2]}$ eine Lösung von $(*)$.

2) Ist A stetig auf I, so bildet die Menge aller Lösungen

$$V \; := \; \left\{ y \in C^1(I \to \mathbb{R}^n) : y' = A(t)\, y \right\}$$

einen Vektorraum der Dimension n.

Eine Basis $\{y_{[1]}, \dots, y_{[n]}\}$ von V heißt **Fundamentalsystem** zum Differentialgleichungssystem $(*)$.

Beweis: **1)** $y' = \alpha y_{[1]}' + \beta y_{[2]}' = \alpha A\, y_{[1]} + \beta A\, y_{[2]} = A \left(\alpha y_{[1]} + \beta y_{[2]} \right) = A\, y.$

2) Nach 1) bildet V einen Vektorraum (mit der üblichen Addition von Funktionen und skalarer Multiplikation). Sei $t_0 \in I$ fest und

$$T_{t_0} : \mathbb{R}^n \to V : y_0 \mapsto y := \text{ Lösung von } y' = A\,y \;\wedge\; y(t_0) = y_0.$$

Dann ist T_{t_0} sinnvoll definiert, da die Lösung y existiert und eindeutig ist (Satz 9.24).

T_{t_0} ist offensichtlich linear,
injektiv: $y = \widetilde{y} \Rightarrow y_0 = y(t_0) = \widetilde{y}(t_0) = \widetilde{y}_0$
und surjektiv: Ist $y \in V$ gegeben, so setze $y_0 = y(t_0) \Rightarrow y = T_{t_0} y_0$.

Dimensionsformel (3.27):

$$n \;=\; \dim \mathbb{R}^n \;=\; \dim \underbrace{\mathrm{Bild}(T_{t_0})}_{=V} + \dim \underbrace{\mathrm{Kern}(T_{t_0})}_{=\{0\},\text{ da injektiv}} \;=\; \dim V.$$

□

9.26 Beispiel: Das System $y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} y$

besitzt die Lösungen $y_{[1]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^t,\; y_{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-t},\; y_{[3]}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t},$

$$\Rightarrow\; V = \Big\{ y = c_1\, y_{[1]} + c_2\, y_{[2]} + c_3\, y_{[3]} : c_j \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Die Abbildung T_0 (mit $t_0 = 0$) ist gegeben durch

$$T_0 : \mathbb{R}^n \to V : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \;\mapsto\; \alpha\, y_{[1]} + \frac{\beta - \gamma}{2}\, y_{[2]} + \frac{\beta + \gamma}{2}\, y_{[3]}.$$

9.27 Folgerung: Seien $y_{[1]}, \ldots, y_{[n]}$ Lösungen von $(*)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \big\{ y_{[1]}, \ldots, y_{[n]} \big\} \text{ linear unabhängig in } V, \\
& \qquad \text{d.h. } \big(c_1 \cdot y_{[1]} + \ldots + c_n y_{[n]} = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = \ldots = c_n = 0 \big) \\
\Leftrightarrow \quad & \big\{ y_{[1]}(t_0), \ldots, y_{[n]}(t_0) \big\} \text{ linear unabhängig im } \mathbb{R}^n \text{ für ein } t_0 \in I \\
\overset{t_0 \text{ war beliebig}}{\Leftrightarrow} \quad & \big\{ y_{[1]}(t), \ldots, y_{[n]}(t) \big\} \text{ linear unabhängig im } \mathbb{R}^n \text{ für alle } t \in I
\end{aligned}$$

Beweis: $T_{t_0} : \mathbb{R}^n \to V$ ist Vektorraumisomorphismus, bildet also linear unabhängige Vektoren auf linear unabhängige Vektoren ab.

□

9.28 Satz: Seien $y_{[1]}, \dots, y_{[n]}$ Lösungen von $(*)$. Dann sind äquivalent:

(i) $\{y_{[1]}, \dots, y_{[n]}\}$ ist ein Fundamentalsystem.

(ii) $W(t) := \det \big(y_{[1]}(t) \ \dots \ y_{[n]}(t) \big) \neq 0$ für ein $t \in I$.

(iii) $W(t) := \det \big(y_{[1]}(t) \ \dots \ y_{[n]}(t) \big) \neq 0$ für alle $t \in I$.

$W(t)$ heißt die **Wronskideterminante**.

9.29 Beispiel: Auf $I :=]0, \infty[$ besitzt

$$y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} y$$

das Fundamentalsystem $\{y_{[1]}, y_{[2]}\} := \left\{ \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, denn

$$W(t) = \begin{vmatrix} t^2 & t \\ t & 0 \end{vmatrix} = -t^2 \neq 0 \text{ auf } I$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung: $y(t) \ = \ c_1 \cdot \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

9.5.2 Inhomogene Systeme

Für $A : I \to \mathbb{R}^{(n^2)}$, $g : I \to \mathbb{R}^n$ betrachte das inhomogene System

$$y' = A(t)\, y + g(t). \qquad (**)$$

9.30 Satz: **1)** Sei $y_{[1]}$ eine Lösung von $(**)$. Für $y_{[2]} \in C^1(I \to \mathbb{R}^n)$ sind äquivalent:

(i) $y_{[2]}$ ist Lösung von $(**)$.

(ii) $y := y_{[1]} - y_{[2]}$ ist Lösung des zugehörigen homogenen Systems $y' = A(t)\, y$.

2) Ist $y_{[1]}$ eine Lösung von $(**)$ (eine **partikuläre Lösung**), so ist der affine Raum $\tilde{V}$ aller Lösungen von $(**)$ gegeben durch

$$\tilde{V} = y_{[1]} + V = \big\{ y_{[1]} + y : y \in C^1(I \to \mathbb{R}^n) \ \wedge \ y' = A(t)\, y \big\}.$$

Beweis: **1)** (i) $\Rightarrow$ $y' = y'_{[1]} - y'_{[2]} = A\, y_{[1]} + g - (A\, y_{[2]} + g) = A\, \big(y_{[1]} - y_{[2]}\big) = A\, y \ \Rightarrow$ (ii).

(ii)) $\Rightarrow$ $y'_{[2]} = (y_{[1]} - y)' = A\, y_{[1]} - A\, y + g = A\, \big(y_{[1]} - y\big) + g = A\, y_{[2]} + g \ \Rightarrow$ (ii).

2) Folgt direkt aus 1). $\square$

9.31 Wie man eine partkuläre Lösung findet (Variation der Konstanten): Sei $\{y_{[1]}, \ldots, y_{[n]}\}$ ein Fundamentalsystem des homogenen Systems $(*)$ und

$$y := c_1(t) \cdot y_{[1]} + \ldots + c_n(t) \cdot y_{[n]}.$$

Dann sind äquivalent:

(i) y ist Lösung des inhomogenen Systems $(**)$.

(ii) $c' = \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$ ist eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{[1]} & \ldots & y_{[n]} \end{pmatrix}}_{n \times n\text{-Matrix mit Höchstrang}} c'(t) \; = \; g(t).$$

Beweis: Durch Nachrechnen. □

9.32 Bemerkung: Variation der Konstanten funktioniert auch im Fall $n = 1$ (kein System, eine lineare Differentialgleichung).

9.33 Beispiele: **1)** Auf $I =]0, \infty[$: $y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 1 \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 2t^2 \\ 3t \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung: $y(t) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} t^3 \\ 3t^2 \end{pmatrix} + c_1 \cdot \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) $y' = (\sin x)y + x\mathrm{e}^{-\cos x}$. Allgemeine Lösung: $y = \dfrac{x^2}{2} \mathrm{e}^{-\cos x} + c\,\mathrm{e}^{-\cos x}$.

9.6 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

9.34 Satz: Sei A eine relle konstante $n \times n$-Matrix. Für jeden Vektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede Anfangszeit $t_0 \in \mathbb{R}$ besitzt das Anfangswertproblem

$$y' \; = \; A\,y, \qquad y(t_0) = y_0$$

die eindeutige globale Lösung

$$y(t) \; = \; \mathrm{e}^{(t-t_0)A} y_0 \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Zur Existenz der Lösung:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{A} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \qquad \text{mit } A^0 = \mathrm{Id},\ \text{insbesondere } \mathrm{e}^0 = \mathrm{Id} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{(t-t_0)A} y_0\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{tA}\left(\mathrm{e}^{-t_0 A} y_0\right) = A\,\mathrm{e}^{tA}\left(\mathrm{e}^{-t_0 A} y_0\right) = A\,y(t)\end{aligned}$$

9.35 Fundamentalsystem: Sei A eine reelle konstante $n \times n$-Matrix. Ist $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, so bildet

$$\left\{\mathrm{e}^{tA} \cdot v_1, \mathrm{e}^{tA} \cdot v_2, \ldots, \mathrm{e}^{tA} \cdot v_n\right\}$$

ein Fundamentalsystem für $y' = A\,y$.

Beweis: **1)** $y = \mathrm{e}^{tA} v_k \;\Rightarrow\; y' = A\,y$ siehe letzter Satz.

2) Wronski-Determinante und Satz 9.28

$$W(0) = \det(\mathrm{e}^{0A} v_1, \ldots, \mathrm{e}^{0A} v_n) = \det(v_1, \ldots, v_n) \neq 0.$$

□

9.36 Satz: Sei A eine relle konstante $n \times n$-Matrix.

1) Ist $v \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so gilt

$$\mathrm{e}^{tA} v = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot v.$$

2) Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis aus reellen Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so ist

$$\left\{\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \cdot v_1, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \cdot v_n\right\}$$

ein Fundamentalsystem für $y' = A\,y$.

9.37 Beispiel: $y' = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} y$. Fundamentalsystem: $\left\{\mathrm{e}^{9t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{4t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

9.38 Komplexe Eigenwerte: **1)** Sei A eine relle konstante $n \times n$-Matrix und

$\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{C}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Dann ist

$$\left\{\mathrm{e}^{\lambda_1 t} \cdot v_1, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t} \cdot v_n\right\}$$

ein komplexes Fundamentalsystem für das relle lineare System $y' = A\,y$.

2) Ist $v \in \mathbb{C}^n$, so sind

$$y(t) := \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{tA} v\right), \quad y(t) := \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{tA} v\right)$$

zwei relle Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

9.39 Beispiel: $y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} y.$

Fundamentalsystem $\{y_{[1]}, y_{[2]}, y_{[3]}\}$:

$$\begin{aligned} y_{[1]}(t) &= \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ y_{[2]}(t) &= \mathrm{e}^{t} \left(\cos t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \\ y_{[3]}(t) &= \mathrm{e}^{t} \left(\sin t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Also Lösungsmethode für $y' = A\,y + g(t)$ mit diagonalisierbarer Matrix A:

1) Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und Basis aus zugehörigen Eigenvektoren $b_1, \ldots, b_n$ bestimmen.

2) Für relle Eigenwerte λ_j wähle $y(t) := \mathrm{e}^{\lambda_j t} \cdot b_j$ als Element des Fundamentalsystems.

Falls $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\lambda_k = \overline{\lambda_j}$: Wähle $y(t) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\lambda_j t} \cdot b_j\right)$ und $y(t) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\lambda_j t} \cdot b_j\right)$ als Elemente des Fundamentalsystems.

Dies liefert ein Fundamentalsystem $\left\{y_{[1]}, \ldots, y_{[n]}\right\}$ von $y' = A\,y$.

3) Bestimme eine partikuläre Lösung y_{part} von $y' = A\,y + g(t)$ mit Variation der Konstanten.

4) Allgemeine Lösung: $y = y_{\text{part}} + c_1\, y_{[1]} + \ldots + c_n\, y_{[n]}$ $(c_j \in \mathbb{R})$.

9.40 Satz: Sei A eine relle konstante $n \times n$-Matrix und $\{v_1, \ldots, v_k\}$ eine Vektorkette zum Eigenwert λ, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} A\,v_1 &= \lambda \cdot v_1 \quad (v_1 \text{ ist Eigenvektor}) \\ A\,v_j &= \lambda \cdot v_j + v_{j-1} \text{ für } j = 2, \ldots, k. \end{aligned}$$

(vgl. Jordansche Normalform). Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} v_1 &= \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot v_1, \\ \mathrm{e}^{tA} v_2 &= \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot (v_2 + t \cdot v_1), \\ \mathrm{e}^{tA} v_3 &= \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \left(v_3 + t \cdot v_2 + \frac{t^2}{2} \cdot v_1 \right), \\ &\vdots \\ \mathrm{e}^{tA} v_k &= \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \cdot v_{k-j} \right) \end{aligned}$$

9.41 Beispiel: $y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} y$

Fundamentalsystem: $\left\{ \mathrm{e}^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathrm{e}^{-2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \right\}$

9.7 Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme

9.42 Beispiel:
$$y''' = 2y'' + y' - 2y \tag{$*$}$$

Geniale Idee: Setze $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$. Dann erfüllt u die Dgl.

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} u \tag{$**$}$$

Allgemeine Lösung von $(**)$:

$$u(t) = c_1\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung von $(*)$ erhält man aus der ersten Koordinate von u::

$$y(t) = u_1(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{-t} + c_3\,\mathrm{e}^{2t}.$$

Allgemeines Vorgehen: Gegeben sei das Anfangswertproblem höherer Ordnung

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} &= f\big(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\big) \\ y(x_0) &= y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \; \ldots, \; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{$*$}$$

mit $n \geq 2$. Setze

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; u' = F(x,u) := \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ f(x, u_1, \ldots, u_n) \end{pmatrix}, \qquad u(x_0) = u_0 := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \tag{$**$}$$

Umgekehrt: Ist u Lösung von $(**)$ und $y := u_1$, dann ist y Lösung von $(*)$.

9.43 Satz: $y \in C^n(I \to \mathbb{R})$ Lösung von $(*)$ $\Leftrightarrow$ $u \in C^1(I \to \mathbb{R}^n)$ Lösung von $(**)$.

Also: Satz von Picard-Lindelöf liefert Eindeutigkeit und lokale Existenz der Lösung von $(**)$ und damit auch der Lösung von $(*)$.

9.8 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

9.44 Definition: Seien $a_0, \ldots, a_{n-1}, g \in C(I \to \mathbb{R})$. Die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)\,y = g(t) \tag{1}$$

heißt **lineare Differentialgleichung** (n-ter Ordnung). Ist $g = 0$, so heißt sie **homogen**, sonst **inhomogen**.

9.45 Bemerkungen: **1)** Die Abbildung

$$y \mapsto y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0\, y$$

ist linear.

2) Definiert man wie oben $u_1 := y, \ldots, u_n := y^{(n-1)}$, so gilt

$$u' \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \ldots & & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \qquad (2)$$

D.h. u ist Lösung eines linearen Systems.
Beachte: Ist u Lösung, so ist $y := u_1$ Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.

9.46 Homogene Differentialgleichung: **1)** Die Menge aller Lösungen

$$V \;:=\; \left\{ y \in C^n(I \to \mathbb{R}) : y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)\, y = 0 \right\}$$

bildet einen Vektorraum der Dimension n. Eine Basis von V heißt **Fundamentalsystem**.

2) n Lösungen $\left\{ y_{[1]}, \ldots, y_{[n]} \right\}$ der homogenen Differentialgleichung bilden genau dann ein Fundamentalsystem, wenn

$$\exists t \in I : W(t) \;:=\; \begin{vmatrix} y_{[1]}(t) & \ldots & y_{[n]}(t) \\ y'_{[1]}(t) & \ldots & y'_{[n]}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{[1]}^{(n-1)}(t) & \ldots & y_{[n]}^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \;\neq\; 0$$

($W(t) =$: **Wronskideterminante**). In diesem Fall gilt $W(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

9.47 Inhomogene Differentialgleichung: **1)** Sei V der Lösungsraum der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und y_{part} eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1). Dann ist

$$\tilde{V} \;:=\; y_{\text{part}} + V$$

der affine Raum aller Lösungen von (1).

2) Variation der Konstanten: Ist $\left\{ y_{[1]}, \ldots, y_{[n]} \right\}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, so ist

$$y \;:=\; c_1(t)\, y_{[1]} + \ldots + c_n(t)\, y_{[n]}$$

genau dann Lösung von (1), wenn

$$\begin{pmatrix} y_{[1]}(t) & \ldots & y_{[n]}(t) \\ y'_{[1]}(t) & \ldots & y'_{[n]}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_{[1]}^{(n-1)}(t) & \ldots & y_{[n]}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \\ \vdots \\ c'_n(t) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

9.48 Beispiel: $y''' - 2y'' - y' + 2y = \mathrm{e}^t$:

1) Homogene Lösung: $y_{\text{hom}}(x) = c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-x} + c_3\,\mathrm{e}^{2x}$ (vergleiche Beispiel am Anfang).

2) Partikuläre Lösung: $y_{\text{part}}(x) = -\dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^x$

3) Allgemeine Lösung: $y(x) = -\dfrac{x}{2}\,\mathrm{e}^x + c_1\,\mathrm{e}^x + c_2\,\mathrm{e}^{-x} + c_3\,\mathrm{e}^{2x}$

9.49 Bemerkung: Bei homogenen Differentialgleichungen der Ordnung $n \geq 2$ gibt es das Prinzip **Reduktion der Ordnung**: Ist $y_{[1]}$ Lösung der Differentialgleichung, so führt der Ansatz $y_{[2]} := c(x)\,y_{[1]}$ eingesetzt auf eine Differentialgleichung der Ordnung $n-1$ für c'. Damit kann aus der Lösung $y_{[1]}$ eine linear unabhängige Lösung $y_{[2]}$ gewonnen werden.

9.50 Beispiel: $y'' - \dfrac{5}{x}\,y' + \dfrac{9}{x^2}\,y = x^2$:

1) Homogen: $y'' - \dfrac{5}{x}\,y' + \dfrac{9}{x^2}\,y = 0$:

  a) Geraten: $y(x) = x^3$ ist Lösung.

  b) Für weitere Lösung Ansatz $y(x) = c(x)\,x^3 \;\Rightarrow\; y(x) = x^3 \ln|x|$.

  c) Also allgemeine Lösung: $y_{\text{hom}}(x) = c_1 \underbrace{x^3}_{=:y_{[1]}(x)} + c_2 \underbrace{x^3 \ln|x|}_{=:y_{[2]}(x)}$,

  $\{y_{[1]}, y_{[2]}\}$ ist Fundamentalsystem: $W(x) \neq 0$.

2) Partikuläre Lösung: Ansatz $y_{\text{part}} = c_1(x)\,y_{[1]} + c_2(x)\,y_{[2]}$

$$\Rightarrow\; y_{\text{part}} = -x^4 \ln|x| + x^4 + x^4 \ln|x| = x^4.$$

3) Allgemeine Lösung: $y(x) = x^4 + c_1\,x^3 + c_2\,x^3 \ln|x| \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

9.9 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Für $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ betrachte die homogene Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_0\,y \;=\; 0. \qquad (*)$$

Für $u := \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ gilt

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} u \qquad (**)$$

Bekannt: $(**)$ hat Lösungen der Form $u(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot v$. Also Ansatz für Lösung der Differentialgleichung $(*)$: $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Eingesetzt in $(*)$:

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\big(\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \ldots + a_0}_{=:p(\lambda)}\big) \;=\; 0.$$

Das Polynom p heißt **charakteristisches Polynom** und ist bis auf das Vorzeichen gleich dem charakteristischen Polynom der Matrix A. Besitzt p eine Nullstelle λ mit Vielfachheit größer als 1, so ist A nicht diagonalisierbar, und $(**)$ hat Lösungen der Form

$$\mathrm{e}^{\lambda t} \cdot \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} \cdot v_{k-j} \right)$$

Dies liefert für $(*)$ Lösungen der Form $t^j\,\mathrm{e}^{\lambda t}$.

Also Kochrezept für die Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_0\,y \;=\; g(t)$$

mit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $g \in C(I \to \mathbb{R})$.

1) Homogene DGl: Der Ansatz $y(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$ eingesetzt:

$$\mathrm{e}^{\lambda t}\big(\underbrace{\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \ldots + a_0}_{=:p(\lambda)}\big) \;=\; 0.$$

Konstruktion des Fundamentalsystems $\{y_{[1]}, \ldots, y_{[n]}\}$: Sei $p(\lambda_j) = 0,\ 1 \le j \le n$.

a) Falls $\lambda_j \in \mathbb{R}$ einfache Nullstelle: Wähle $y_{[j]}(t) := \mathrm{e}^{\lambda_j t}$.

b) Falls $\lambda_j, \lambda_{j+1} = \overline{\lambda_j} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ einfache Nullstellen:

$$y_{[j]}(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\lambda_j)t} \cos\big(\mathrm{Im}\,(\lambda_j)t\big),\ y_{[j+1]}(t) := \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\lambda_j)t} \sin\big(\mathrm{Im}\,(\lambda_j)t\big).$$

c) Falls $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \ldots = \lambda_{j+k-1} \in \mathbb{R}$ k-fache Nullstelle:

$$y_{[j]}(t) := \mathrm{e}^{\lambda_j t},\ y_{[j+1]}(t) := t\,\mathrm{e}^{\lambda_j t},\ \ldots,\ y_{[j+k-1]}(t) := t^{k-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_j t}.$$

d) Analog für komplexe Nullstellen der Ordnung k:

$$t^m\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\lambda_j)t} \cos\big(\mathrm{Im}\,(\lambda_j)t\big),\ t^m\,\mathrm{e}^{\mathrm{Re}\,(\lambda_j)t} \sin\big(\mathrm{Im}\,(\lambda_j)t\big) \text{ für } 0 \le m \le k-1.$$

2) Partikuläre Lösung über Variation der Konstanten.

3) Allgemeine Lösung = partikuläre L. + allgemeine L. der homogenen Differentialgleichung

9.51 Beispiele: **1)** $y''' - y'' - y' + y = 0$: $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$

Fundamentalsystem: $y_{[1]}(t) = \mathrm{e}^t,\ y_{[2]}(t) = t\,\mathrm{e}^t,\ y_{[3]}(t) = \mathrm{e}^{-t}$.

Allgemeine Lösung: $y(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2 t\,\mathrm{e}^t + c_3\,\mathrm{e}^{-t}$

2) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$: $p(\lambda) = (\lambda^2 + 4)^2$:

Fundamentalsystem: $y_{[1]}(t) = \cos(2t),\ y_{[2]}(t) = \sin(2t),\ y_{[3]}(t) = t\cos(2t),\ y_{[4]}(t) = t\sin(2t)$.

3) $y'' - 4y = \mathrm{e}^{2t}$

a) Homogen: $y'' - 4y = 0$:
Fundamentalsystem $y_{[1]}(t) = \mathrm{e}^{2t},\ y_{[2]}(t) = \mathrm{e}^{-2t}$.

b) Partikuläre Lösung: $y = c_1(t)\,\mathrm{e}^{2t} + c_2(t)\,\mathrm{e}^{-2t}$ (Variation der Konstanten)

$$\Rightarrow y_{\mathrm{part}} = \frac{1}{4}\,t\,\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{16}\mathrm{e}^{2t}$$

c) Allgemeine Lösung: $y(t) = \frac{1}{4}\,t\,\mathrm{e}^{2t} + c_1\,\mathrm{e}^{2t} - c_2\,\mathrm{e}^{-2t}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

This is the end!

Inhaltsverzeichnis

Stichwortverzeichnis