

Besprechung am 17.04.19

Aufgabe 4: *Metriken und Kugelumgebung*

4.1 Zeigen Sie, dass für alle reelle Zahlen a, b die Dreiecksungleichung $|a + b| \leq |a| + |b|$ gilt
Zeigen Sie, dass es sich bei den folgenden Abbildungen um Metriken handelt

4.2 $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto d(x, y) = |x - y|$ auf \mathbb{R}

4.3 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$
auf einer beliebigen Menge X .

Skizzieren Sie für die angegebenen Metriken die offenen Kugel $B_R(0)$

4.4 $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (x, y) \mapsto |x - y|$ auf \mathbb{R}

4.5 $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ auf \mathbb{R}^2

4.6 $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ auf \mathbb{R}^2

4.7 $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}: ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$ auf \mathbb{R}^2

4.8 Die Metrik aus **3.** für $X = \mathbb{R}^2$

Aufgabe 5: *Eine rekursive Folge*

Untersuchen Sie die Folge

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{5}{a_n} \right) \quad \text{mit } a_1 = -2$$

auf Konvergenz und bestimmen Sie den Grenzwert im Falle der Konvergenz.

Aufgabe 6: *Metrik und Konvergenz*

Untersuchen Sie, ob die Folge $\left(\frac{1}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Metriken

6.1 $d_1(x, y) = \sqrt{(x - y)^2}$

6.1 $d_2(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$

gegen 0 konvergiert.