D. Merkt

Vortragsübung 5

SS 19

Besprechung am 15.05.19

Wir üben ein wenig für die 1. Scheinklausur mit alten Prüfungsaufgaben

Diplomvorprüfung 2012

Aufgabe 1 (7 Punkte):

a) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi/2}}{2^n}$? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$\mathbf{b_1)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$, $\quad$ $\mathbf{b_2)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+2)^3-1}$, $\quad$ $\mathbf{b_3)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$.

SK2 SS 2008

Aufgabe 4 (2 Punkte) Berechnen Sie das Cauchy–Produkt der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n, \quad \text{für } |x| < 2.$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n, \qquad \text{mit} \quad a_n =$$

SK2 SS 2008

Aufgabe 3 (3 Punkte) Es seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $|a_n|, |b_n| \le \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ absolut konvergent ist.

SK2 SS 2008

Aufgabe 6 (4 Punkte) Geben Sie an, ob die folgenden reellen Reihen konvergent sind (J für „ja“, N für „nein“), und tragen Sie für jede konvergente Reihe ihren Grenzwert in die letzte Spalte ein.

	ist konvergent	Grenzwert
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$		
$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$		
$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^3-2}$		

Aufgabe 4 (9 Punkte)
Beweisen Sie die Konvergenz bzw. Divergenz der angegebenen Reihen. Geben Sie jeweils an, welches Kriterium Sie verwenden.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{1+n+2n^2}$:

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{2^n}$:

SK2 SS 2008

Aufgabe 5 (2 Punkte) Sind die folgenden Aussagen für alle komplexen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gültig (J für „ja“, N für „nein“)?

$\left(\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \lvert a_n \rvert < \frac{1}{n} \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert	
$\left(\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} < 1 \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert	
$\left(\forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} \geq 1 \right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert	
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert $\implies \lim_{n \to \infty} a_n = 0$	

SK SS 2011

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{n^2} (z - 2\mathrm{i})^n$.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius: $R =$.

b) Was besagt der Konvergenzradius? Geben Sie jeweils die Menge an:

Die Reihe konvergiert in der Menge ,

Die Reihe divergiert in der Menge .

SK2 SS 2008

Aufgabe 7 (4 Punkte) Geben Sie den Konvergenzradius R ($0 \leq R \leq \infty$) folgender Potenzreihen an ($z \in \mathbb{C}$).

Potenzreihe	R	Potenzreihe	R
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n - 4^n}$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{3n}$	
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$		$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a^n + b^n) z^n, \quad a > b > 0$	

SK SS 2011

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Heaviside-Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$.

Begründen Sie mit Hilfe des Folgenkriteriums für Stetigkeit, warum h nicht stetig ist.