Inhaltsverzeichnis

I.Einführung

II.Versuch

III.Arbeitsblatt1

IV.Arbeitsblatt2

V.Verbesserungsvorschläge

I.Einführung

Dauer: 10min
Ziel: Vorstellung der Pythagoräer
Material: Vortrag ohne Hilfsmittel

In dem Vortrag sollen folgende Fragen beantwortet werden:

-Was weiß man über Pythagoras?
-Wer waren die Pythagoräer?
-Womit beschäftigten sie sich?
-Welche Ergebnisse ihrer Forschungen sind heute noch relevant?

Inhalt in Stichworten:
Pythagoras war Philosoph und Mathematiker. Er lebte im 6.Jahrhundert vor Christus. Es gibt keine schriftlichen Zeugnisse von ihm selbst. Er wurde auf Samos geboren, lebte lange in Ägypten, im Irak und in Italien. Er gründete die philosophisch-religiös-politische Sekte der Pythagoräer. Diese beschäftigten sich u.a. mit Astronomie, Geometrie und Harmonielehre.
Die Erde war für sie eine Kugel, sie wussten dass Morgen- und Abendstern der selbe Planet ist, kannten die platonischen Körper und irrationale Zahlen. Der Satz des Pythagoras war schon lange vor Ihnen bekannt.
Die Pythagoräer beschäftigten sich auch intensiv mit Harmonielehre, ein in der Musik heute noch wichtiger Begriff ist das pythagoräische Komma.

II. Versuch

Dauer: 20min
Ziel: Messwerte der Frequenzen von Grundton, Oktav, Quint und Quart.
Material: Monochord, Frequenzmesser, Tafel.

Vorbemerkung an der Tafel: Die Frequenz wird in Hertz gemessen

$$1 Hertz = \frac{1 Schwingung}{1 Sekunde}$$

Beschreibung des Materials:

Das Monochord besteht aus einer Wäscheleine, die über einen Tisch gespannt wird. Mit Hilfe eines verschiebbaren Holzstücks wird die Saite in gewünschte Teile unterteilt.
Als Frequenzmessgerät kann ein elektrisches Gerät verwendet werden, wie es zum Stimmen von Instrumenten benutzt wird. Hier wurde als Frequenzmesser eine drehbare, waagerecht gelagerte, mit einer Handkurbel versehene Scheibe benutzt, in deren Rand 142 Zähne gesägt waren. Ein Stück Karton wurde so am Tisch angebracht, dass es gegen den Rand der Scheibe drückte. Durch Drehen der Scheibe entstand dann ein Ton, je schneller die Drehung, desto höher der Ton.

Versuchsablauf:

Ein Schüler schlägt am Monochord den Grundton an, der Lehrer dreht die Scheibe des Frequenzmessers bis er die Geschwindigkeit gefunden hat, bei der der Frequenzmesser den gleichen Ton erzeugt wie das Monochord. Dann misst ein zweiter Schüler eine Minute lang die Zeit und der Rest der Klasse zählt solange die Umdrehungen der Scheibe.
Dann ist die Frequenz des Grundtons die Anzahl der Umdrehungen mal die Anzahl der Zähne geteilt durch die gemessene Zeit.

Durch Halbierung der Saite wird die Oktave erzeugt und wie oben ihre Frequenz gemessen. Durch das Klingen von $\frac{2}{3}$ der Saite wird die Quint erzeugt und ihre Frequenz gemessen, und schliesslich wird durch Klingen von $\frac{3}{4}$ der Saite die Quart erzeugt und auch deren Frequenz gemessen.
Die Ergebnisse werden wie folgt an der Tafel festgehalten:

Intervall	klingender Teil der Saite	Frequenz	Frequenzverhältnis zum Grundton
Grundton	$\frac{1}{1}$	80 Hz	$\frac{1}{1}$
Oktave	$\frac{1}{2}$	160 Hz	$\frac{2}{1}$
Quint	$\frac{2}{3}$	120 Hz	$\frac{3}{2}$
Quart	$\frac{3}{4}$	107 HZ	$\frac{4}{3}$

III.Arbeitsblatt1

Dauer: 15min
Ziel: Beschäftigung mit der C-Dur Tonleiter. Berechnung des pythagoräischen Kommas.
Material: Taschenrechner, Tafel, Arbeitsblatt.

Einführend einige Worte zur C-Dur Tonleiter (Informationen sind auch auf dem Arbeitsblatt).

Aufgabe a)
Die Schüler sollen sich anhand der auf dem Arbeitsblatt angegebenen Klaviatur klarmachen, dass eine Oktave offenbar aus 12, eine Quint aus 7 und eine Quart aus 5 Halbtonschritten besteht.

Aufgabe b)
Die Schüler sollen durch abzählen oder überlegen darauf kommen, dass 12 Quinten den selben Ton geben sollten wie 7 Oktaven, also $m = 12$ und $n = 7$.

Aufgabe c)
Die Frequenzverhältnisse müssen wie folgt lauten:
eine Quint $\frac{3}{2}$, zwei Quinten $\left(\frac{3}{2}\right)^2$, drei Quinten $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ und für $m = 12$ Quinten $\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

Aufgabe d)
Die Frquenzverhältnisse müssen wie folgt lauten:
eine Oktave 2, zwei Oktaven 2^2, drei Oktaven 2^3, und für $n = 7$ Oktaven 2^7.

Aufgabe e)
Das Frequenzverhältnis von zwölf Quinten ist $129,7463379$...., das von 7 Oktaven ist aber 128, das Frequenzverhaltnis von12 Quinten / 7 Oktaven ist $\frac{129,7463379}{128}$, also ungefähr $1,01364$.
Erklärung an der Tafel: Dieses Frequenzverhältnis heißt Pythagoräisches Komma (Komma heißt kleines Intervall), 12 Quinten entsprechen also physikalisch nicht 7 Oktaven, wie es die Tastatur eines Klaviers nahelegt!

IV.Arbeitsblatt2

Dauer: 20min
Ziel: Zeigen, dass das Frequenzverhältnis einer Anzahl von Quinten nie gleich dem Frequenzverhältnis einer Anzahl von Oktaven sein kann. Ferner andere Intervalle finden, für die ebenfalls gilt, das eine Anzahl von ihnen nie gleich einer Anzahl von Oktaven sein kann
Material: Tafel, Arbeitsblatt.

Zu zeigen: $\left(\frac{3}{2}\right)^m \neq \; 2^n$ für alle $m, n \;\epsilon\; \mathbb{N}$

Gegenannahme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^m &= 2^n \text{ für geeignete } m, n \;\epsilon\; \mathbb{N} \\ \frac{3^m}{2^m} &= 2^n \\ 3^m &= 2^n 2^m \end{aligned}$$

2^m und 2^n sind gerade Zahlen, ihr Produkt ist auch gerade, 3^m ist aber ungerade, also ein Widerspruch zur Gegenannahme. Eine Anzahl Quinten kann also nie das gleiche Frequenzverhältnis haben wie eine Anzahl Oktaven.

Für andere Intervalle z.B die Quart geht geht der Beweis genauso.

Zusatzaufgabe an der Tafel:
Es soll gezeigt werden, dass das Frequenzverhältnis einer Anzahl eines beliebigen Intervalls mit Frequenzverhältnis $\frac{p}{q}$, $p, q \;\epsilon\; \mathbb{N}$ nie gleich dem Frequenzverhältnis einer Anzahl Oktaven sein kann.

Zu zeigen: $\left(\frac{p}{q}\right)^m \neq \; 2^n$ für alle $m, n, p, q \;\epsilon\; \mathbb{N}$, p, q teilerfremd.

Gegenannahme:

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{q}\right)^m &= 2^n \text{ für geeignete } m, n \;\epsilon\; \mathbb{N} \\ \frac{p^m}{q^m} &= 2^n \\ p^m &= 2^n q^m \end{aligned}$$

q hat die Primfaktorzerlegung $q = q_1\ q_2\ q_3\ ...\ q_k$, also gilt

$$p^m = 2^n(q_1 q_2 q_3 ... q_k)$$

Das bedeutet p^m ist teilbar z.B durch q_1, das ist ein Widerspruch zur Annahme der Teilerfremdheit.

Aus diesen Untersuchungen folgt, dass das gleichzeitige Spielen sehr hoher und tiefer Töne problematisch ist. Gerade das will man aber bei Klavier oder Orchester.
In der heutigen Musik wird dieses Problem dadurch gelöst, dass man den Fehler des Pythagoräischen Kommas gleichmaßig über alle Töne verteilt. Man zwingt dazu 12 Quinten gleich zu sein wie 7 Oktaven, indem man eine Quint definiert als das Frequenzverhältnis $2^{\frac{7}{12}}$ (anschaulich ist das ein zwölftel von sieben Oktaven). Daraus folgt dann, dass ein Halbtonschritt das Frequenzverhältnis $2^{\frac{1}{12}}$ hat.
Dann klingt zwar alles ein wenig falsch, aber eben nur wenig.

V.Verbesserungsvorschläge

Im Vorfeld könnte man herausfinden, ob es in der Klasse Kinder mit besonderem Interesse an Musik oder Physik gibt, um deren Erfahrungen und Vorwissen miteinzubeziehen. Das könnten dann z.B. Demonstrationen von Musikinstrumenten, oder Erfahrungsberichte vom Spiel im Orchester sein. Das Thema trigonometrische Funktionen würde natürlich sehr gut dazu passen. Ferner Cladnische Klangfiguren, die Arbeiten von Lauterwasser, eventuell auch religiöse Aspekte (am Anfang war das Wort..., Kirchenmusik, das wohltemperierte Klavier von Bach)
Was am Ende der Unterrichtseinheit sehr gut passen würde, wäre die Einführung der Logarithmusfunktion, auf der x-Achse die Frequenzen und auf der y-Achse die Intervalle. Daran könnte man nochmals graphisch veranschaulichen, dass z.B. zwölf Quinten nicht gleich sieben Oktaven sind.