Konstruktion der ganzen Zahlen aus den natürlichen Zahlen

Ziel: Die Gleichung $m + x = n$ soll für alle $m, n \in \mathbb{N}$ eine Lösung besitzen.
Motivation: Für $m \leq n - 1$ besitzt die Gleichung genau eine Lösung $x \in \mathbb{N}$ und x ist durch $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eindeutig bestimmt. Aber $(m + 1) + x = (n + 1)$ besitzt dieselbe Lösung. Allgemein:

$$m + x = n \text{ und } k + x = l \text{ besitzen dieselbe Lösung } \Leftrightarrow \; n + k = l + m.$$

Auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sei die Relation $R_{\mathbb{Z}} \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ definiert durch

$$(n, m) R_{\mathbb{Z}} (k, l) \; :\Leftrightarrow \; n + k = l + m.$$

1. Beweisen Sie: $R_{\mathbb{Z}}$ ist eine Äquivalenzrelation.
2. Es sei $\mathbb{Z} := \{[(n, m)] : (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $R_{\mathbb{Z}}$. Die Addition dieser Äquivalenzklassen sei definiert durch

   $$[(n, m)] + [(k, l)] := [(n + k, m + l)].$$

   Zeigen Sie:

   (a) Diese Definition der Addition ist unabhängig von der Wahl der Vertreter der Äquivalenzklassen.

   (b) $(\mathbb{Z}, +)$ bildet eine kommutative Gruppe.

   (c) Die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \mapsto [(1, n + 1)]$ ist injektiv und erhält die Addition: $f(n) + f(m) = f(n + m)$.