Übungen zur Schulmathematik

Blatt 1

Aufgabe 1 (Euklidischer Algorithmus und kleinstes gemeinsames Vielfaches)
Berechnen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache als $\mathrm{kgV}(a,b) = \frac{ab}{\mathrm{ggT}(a,b)}$ in folgenden Fällen.

a) $\mathrm{kgV}(1224, 1275) \in \mathbb{Z}$

b) $\mathrm{kgV}(1071, 861) \in \mathbb{Z}$

c) $\mathrm{kgV}(x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 2, x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 8x - 6) \in \mathbb{Q}[x]$

Aufgabe 2 (Algebraische Zahlen und elementare Rechenoperationen)
Bezeichne $\mathbb{A}$ die Menge der reellen algebraischen Zahlen.

a) Sei $\alpha \in \mathbb{A}$. Zeigen Sie, dass $-\alpha \in \mathbb{A}$.

Was die restlichen Operationen angeht, möchten wir uns hier auf Beispiele beschränken.

b) Konstruieren Sie $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $p(\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}) = 0$.

c) Konstruieren Sie $s \in \mathbb{Q}[x]$ mit $s(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$.

d) Konstruieren Sie $q \in \mathbb{Q}[x]$ mit $q\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right) = 0$.

Allgemein gilt, dass $\mathbb{A}$ einen Teilkörper von $\mathbb{R}$ bildet. Dies folgt aus der Theorie der algebraischen Körpererweiterungen, die üblicherweise in einer Vorlesung über Algebra behandelt wird.

Aufgabe 3 (Es gibt mehr transzendente als algebraische Zahlen)

a) Zeigen Sie, dass die Menge der reellen algebraischen Zahlen abzählbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist.

c) Folgern Sie, dass die Menge der transzendenten Zahlen überabzählbar ist.

Aufgabe 4 (Diagonale im gleichmäßigen Fünfeck)
Zeigen Sie, dass im gleichmäßigen Fünfeck Diagonale und Seite inkommensurabel sind.
Tipp: Zeichnen Sie im regelmäßgigen Fünfeck zunächst alle Diagonalen ein.