Übungen zur Schulmathematik

Blatt 3

Aufgabe 9 (Lucas-Zahlen)
Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n-te *Lucas-Zahl* gegeben durch

$$L_n := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

a) Berechnen Sie L_n für $1 \leq n \leq 5$. Finden und beweisen Sie eine rekursive Formel für L_n.

b) Folgern Sie, dass die Lucas-Zahlen eine Folge ganzer Zahlen bilden.

c) Zeigen Sie, dass zwei aufeinander folgende Lucas-Zahlen teilerfremd sind.

Aufgabe 10 (Transzendenz von Potenzen und Irrationalität von Logarithmen)
Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a \neq b$. Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Sei $t \in \mathbb{R}$ transzendent.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Seien a und b teilerfremd. Es ist $\log_b(a)$ irrational.

b) Es ist t^n transzendent.

c) Es ist $\log_{\mathrm{e}}\left(\frac{a}{b}\right)$ irrational. Dabei bezeichnet e die eulersche Zahl.

Tipp: Sie dürfen verwenden, dass die algebraischen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 11 (Natürlicher Logarithmus, Exponentialfunktion und eulersche Zahl)
Für $x \in (0, \infty)$ sei

$$\mathrm{L}(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es ist $\mathrm{L} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ bijektiv. Es bezeichne $\mathrm{L}^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ die Umkehrfunktion L.

b) Für $x, y \in (0, \infty)$ gilt $\mathrm{L}(xy) = \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(y)$.

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{L}^{-1}(x + y) = \mathrm{L}^{-1}(x) \cdot \mathrm{L}^{-1}(y)$.

d) Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ gilt $\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{p}{q}\right) = (\mathrm{L}^{-1}(1))^{\frac{p}{q}}$.

e) Sei $\mathrm{e} := \mathrm{L}^{-1}(1)$. Es gilt $\mathrm{L}^{-1}(x) = \mathrm{e}^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 12 (Nullstellen von Polynomen)
Beweisen Sie folgende Aussagen.

a) Seien $p \in \mathbb{C}[x]$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Ist $p(\alpha) = 0$, so ist $x - \alpha$ ein Teiler von p.

b) Sei $p \in \mathbb{C}[x]$ von Grad $m \in \mathbb{N}$. Dann hat p höchstens m verschiedene Nullstellen.