

Übungen zur Schulmathematik

Blatt 4

Aufgabe 13 (Darstellung der Kreiszahl Pi über eine Fourierreihe)

Für eine Funktion $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Fourierreihe in Sinus-Kosinus-Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{für } k \geq 0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx \quad \text{für } k \geq 1.$$

- Bestimmen Sie die Fourierreihe der Signumsfunktion $\text{sign} : [-\pi, \pi] \rightarrow \{-1, 0, 1\}$.
- Finden Sie durch Einsetzen eines geeigneten Wertes eine Reihendarstellung von π . Klären Sie die Konvergenz der Reihe für diesen Wert.

Aufgabe 14 (Exponentialfunktion über ihre Differentialgleichung)

Bezeichne $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $f' = f$, $f(0) = 1$.

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

- Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\text{Exp}(x + y) = \text{Exp}(x) \text{Exp}(y)$.
- Es ist $\text{Exp} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ bijektiv.
- Sei $e := \text{Exp}(1)$. Es gilt $\text{Exp}(x) = e^x$ für $x \in \mathbb{R}$.

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Picard-Lindelöf.

Aufgabe 15 (Substitution zur Lösung von polynomialen Gleichungen)

Ein normiertes Polynom $p(x) = p_0 + \dots + p_{n-1}x^{n-1} + x^n$ heißt *reduziert*, falls $p_{n-1} = 0$.

- Bringen Sie ein allgemeines normiertes Polynom $p(x)$ durch eine geeignete lineare Substitution in reduzierte Form. Lösen Sie so die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$.
- Wenden Sie die Substitution aus a) auf $x^3 + ax^2 + bx + c$ an.
Hinweis: Dies vervollständigt die Herleitung der Formeln von Cardano aus der Vorlesung.
- Finden Sie Bedingungen an die Koeffizienten von $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ derart, dass bei Anwendung der Substitution aus a) auch das Monom von Grad 1 eliminiert wird. Bestimmen Sie in diesem Fall die Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$. Welches Lösungsverfahren aus dem Schulcurriculum haben Sie damit hergeleitet?

Aufgabe 16 (Formeln von Cardano)

Lösen Sie die Gleichung $x^3 + 24x - 54 = 0$.