# Übungen zur Schulmathematik

Blatt 5

**Aufgabe 17** (Polynomiale Gleichungen)
Lösen Sie über $\mathbb{C}$ folgende Gleichungen.

a) $x^3 - 50x^2 + 769x - 3600 = 0$

b) $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$

**Aufgabe 18** (Reelle Nullstellen von Polynomen dritten Grades)
Sei $f := x^3 + ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(1) Das Polynom $f$ hat 3 verschiedene reelle Nullstellen.

(2) Es ist $R := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{3}\right)^3 < 0$.

Interpretieren Sie (2) bezüglich der bei der Berechnung der ersten reellen Nullstelle auftretenden Quadratwurzeln.

*Hinweis: In* (2) *sind $p$ und $q$ die Koeffizienten der Reduktion von $f$.* Cf. Aufgabe 15.

**Aufgabe 19** (Algebraische Polynome und polynomiale Funktionen)

a) Zeigen Sie folgenden Satz.

Sei $p \in \mathbb{C}[x]$. Dann ist $p = 0 \in \mathbb{C}[x]$ genau dann, wenn $p(\alpha) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$.
D.h. $p$ ist das Nullpolynom genau dann, wenn $p$ die Nullfunktion auf $\mathbb{C}$ induziert.

b) Folgern Sie aus a) den Satz vom Koeffizientenvergleich.

c) Bezeichne $\mathbb{F}_2$ den Körper mit 2 Elementen. Zeigen Sie, dass $x^2 + x$ auf $\mathbb{F}_2$ die Nullfunktion induziert. Gilt über $\mathbb{F}_2$ der Satz vom Koeffizientenvergleich?

d) Sei $f \in \mathbb{R}[x]$. Zeigen Sie, dass $f$ genau dann ungeraden Grad hat, wenn die Zahl der reellen Nullstellen (mit Multiplizität) von $f$ ungerade ist.

**Aufgabe 20** (Irreduziblität mit und ohne Eisenstein, Erweiterung des Grundkörpers)
Beweisen Sie alle folgenden Aussagen und beantworten Sie alle Fragen.

a) Es ist $f := 5x^3 - 6x^2 + 3x + 12 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.

b) Für alle $n \geq 2$ und alle Primzahlen $p$ ist das Polynom $x^n \pm p \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.
Insbesondere ist $g := x^4 + 2 \in \mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.

c) Es erfüllt $h := x^2 + 4$ kein Eisensteinkriterium, aber $h \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel.

d) Sind $f, g, h \in \mathbb{R}[x]$ irreduzibel? Was gilt für $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$?

*Hinweis: Es ist nicht erforderlich eventuelle Nullstellen von $f$ explizit zu berechnen.*