Übungen zur Schulmathematik

Blatt 7

Aufgabe 25 (Additionstheoreme via Differenziation)
Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Differenzieren Sie geeignete Hilfsfunktionen um folgende Aussagen zu beweisen.

a) Es gilt $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

b) Es gilt $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

Aufgabe 26 (Reihenentwicklungen der Winkelfunktionen, Eulersche Formel und algebraische Werte)

a) Stellen Sie für die Winkelfunktionen sin und cos die Taylorreihen im Entwicklungspunkt 0 auf und beweisen Sie, dass diese auf ganz $\mathbb{R}$ gegen sin bzw. cos konvergieren.

b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$.

c) Sei $r \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\sin(r\pi)$ und $\cos(r\pi)$ algebraische Zahlen sind.

Tipp: In c) dürfen Sie verwenden, dass die algebraischen Zahlen einen Körper bilden.

Aufgabe 27 (Zusammenhang von Glattheit und Analytizität: Beispiel von Cauchy)
Gegeben Sei die Funktion

$$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \phi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass ϕ unendlich oft differenzierbar ist mit $\phi^{(n)}(0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Was bedeutet das für die Taylorreihe von ϕ im Entwicklungspunkt 0? Ist ϕ analytisch?

Aufgabe 28 (Tangens und Arcustangens)
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$ ist die *Tangensfunktion* definiert durch $\tan(x) := \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

a) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Tangensfunktion und skizzieren Sie $\tan(x)$ auf dem Intervall $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Bestimmen Sie alle Bereiche auf denen die Tangensfunktion streng monoton steigend ist und skizzieren Sie jeweils die Umkehrfunktion *Arcustangens* arctan.

c) Bestimmen Sie die erste Ableitung des Arcustangens.

d) Verwenden Sie den Arcustangens um $\dfrac{\pm 1 \pm \mathrm{i}}{\sqrt{2}}$ in Polarform umzuwandeln.