

Übungen zur Schulmathematik

Blatt 8

Aufgabe 29 (Areafunktionen durch Lösen algebraischer Gleichungen)

Für $x \in \mathbb{R}$ sind die Hyperbelfunktionen definiert durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Betrachten Sie die Funktionswerte als Variable y und lösen Sie die Gleichungen nach x auf. Auf diese Weise erhalten Sie Ausdrücke für die Areafunktionen Arsinh und Arcosh. Wie viele Äste treten jeweils auf? Woran kann man das in Ihrer Rechnung erkennen?

Aufgabe 30 (Additionstheoreme für Tangens und Arcustangens)

- Verwenden Sie die Additionstheoreme für $\sin$ und $\cos$ um ein solches für $\tan$ aufzustellen.
- Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus a) um ein Additionstheorem für $\arctan$ aufzustellen. Klären Sie dessen Geltungsbereich.

Aufgabe 31 (Existenz der Fläche unter der Hyperbel)

Die Hyperbel in Normalform ist gegeben durch die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$.

- Transformieren Sie diese Gleichung durch eine Drehung um $\frac{\pi}{4}$.
- Berechnen Sie mit Hilfe von a) die für die Definition von $\sinh$ und $\cosh$ verwendete Fläche durch Integration.

Tipp zu a): Machen Sie sich eine Skizze und verwenden Sie eine geeignete Drehmatrix.

Aufgabe 32 (Reihenentwicklung des Arcustangens)

- Stellen Sie über die Taylorreihe von $\arctan'$ die Taylorreihe von $\arctan$ im Entwicklungspunkt 0 auf. Bestimmen Sie deren Konvergenzbereich.
- Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \text{sign}(x) \frac{\pi}{2}$.
- Sei $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$. Zeigen Sie, dass $\arctan x = \text{sign}(x) \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)x^{2k+1}}$.
- Zeigen Sie, dass die Reihe aus c) auf $(1, \infty)$ lokal gleichmäßig konvergiert, d.h. dass zu jedem $x \in (1, \infty)$ eine Umgebung existiert auf der die Reihe gleichmäßig konvergiert.